Lehrstuhl für Wirtschafts- und
Sozialstatistik WS 06/07

Übungen zur Vorlesung Statistik II
Blatt 7

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Montag, dem 04.12.06, 14.15 – 15.45 Uhr im HS 3, Carl-Zeiß-Str. 3, besprochen.

Aufgabe 33
Gegeben sei eine binomialverteilte Zufallsvariable mit folgender Verteilung: $X \sim B(20; \theta)$. Bestimmen Sie den Momentenschätzer für θ zur Beobachtung (4, 5, 2, 4, 7, 1, 2, 3, 2, 0).

Aufgabe 34
Zur Schätzung des Erwartungswertes einer Zufallsvariablen wird eine einfache Stichprobe $(X_1, ..., X_{35})$ betrachtet. Die X_i sind unabhängig und identisch verteilt mit unbekanntem Erwartungswert θ und bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Es werden die Schätzfunktionen g_1 und g_2 gebildet:

$$g_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{X}_1 + \overline{X}_2\right) \qquad g_2 = \frac{10}{35}\overline{X}_1 + \frac{25}{35}\overline{X}_2$$

mit $\overline{X}_1$ - arithmetisches Mittel aus den ersten 10 Beobachtungen
$\overline{X}_2$ - arithmetisches Mittel aus den letzten 25 Beobachtungen.

a) Sind die Schätzfunktionen erwartungstreu zum Schätzen von θ?
b) Welche der Schätzfunktionen ist wirksamer?

Aufgabe 35
a) Ermitteln Sie den mittleren quadratischen Fehler der Schätzfunktion g_2 aus Aufgabe 34.
b) Welcher mittlere quadratische Fehler ergibt sich für die folgende Stichprobenfunktion:

$$g(X_1, \ldots, X_5) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{5} X_i \ ?$$

Aufgabe 36
Zeigen Sie, dass $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ nicht erwartungstreu zum Schätzen der Varianz der Grundgesamtheit ist.

Aufgabe 37
In der Mühle eines Freilichtmuseums wird nach alter Tradition Mehl gemahlen und in Säcke verpackt. Das Einzelgewicht X eines Mehlsacks kann als normalverteilte Größe angesehen werden. Die Varianz des Gewichts sei aus langjähriger Erfahrung bekannt und betrage 225 g^2. Eine einfache Stichprobe vom Umfang n = 16 erbrachte ein Gesamtgewicht von 7 936 Gramm.

a) Geben Sie eine erwartungstreue Punktschätzung für das durchschnittliche Gewicht eines einzelnen Mehlsacks an.
b) Bestimmen Sie ein konkretes 0,90-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ.
c) Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, wenn das 90 %-Konfidenzintervall höchstens eine Breite von 6 Gramm haben soll?

Aufgabe 38
Bei der Produktion von Aluminiumteilen sei das Gewicht der Teile normalverteilt. Für die Schätzung des unbekannten Erwartungswertes μ wird eine Stichprobe vom Umfang n = 16 betrachtet:

38, 42, 43, 39, 40, 41, 41, 39, 44, 41, 39, 42, 40, 44, 42, 41

a) Geben Sie den Wert einer erwartungstreuen Punktschätzung für die Varianz des Gewichtes an.
b) Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für den Parameter μ.
c) Geben zum Niveau 0,90 ein Konfidenzintervall für den Parameter σ^2 an.

Aufgabe 39
Mit einer Studie sollen die Chancen neu gegründeter Unternehmen untersucht werden. In einer Stichprobe von 200 neu gegründeten Unternehmen befinden sich 168 erfolgreiche Unternehmen (Unternehmen, die innerhalb von drei Jahren einen Gewinn erwirtschaftet haben).

a) Berechnen Sie zu einem Konfidenzniveau von 95% ein Konfidenzintervall für den Anteil der erfolgreichen Neugründungen.
b) Zu welchem Konfidenzniveau erhält man bei obiger Stichprobe ein Intervall der Länge 0,08?
c) Wie groß müsste die Stichprobe sein, damit sich ein 95%-Konfidenzintervall mit einer Breite von höchstens 0,08 ergibt?
d) Unter welchen Annahmen haben Sie die Berechungen in den Teilaufgaben a) bis c) durchgeführt?

Zusatz:

Aufgabe 40
Zur Schätzung des Erwartungswertes einer Zufallsvariablen wird eine einfache Stichprobe $(X_1, \dots, X_{2n})$ betrachtet. Die X_i sind unabhängig und identisch verteilt mit unbekanntem Erwartungswert θ und bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Es werden die Schätzfunktionen g_1, g_2 und g_3 gebildet:

$$g_1(X_1, \dots, X_{2n}) = \frac{1}{n} \sum_{i \text{ gerade}} X_i$$

$$g_2(X_1, \dots, X_{2n}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} X_i\right) + \frac{2}{3} X_{2n}$$

$$g_3(X_1, \dots, X_{2n}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} X_i \,.$$

a) Sind die Schätzfunktionen erwartungstreu zum Schätzen von θ?

b) Ermitteln Sie die mittleren quadratischen Fehler der Schätzfunktionen.