Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Dr. M. Pasche

Inhaltsverzeichnis

Hinweise:

- Das Skript ist für eine 2 Semesterwochenstunden umfassende Vorlesung konzipiert. Es gibt einen Überblick über einige Gebiete der Mathematik, die für Wirtschaftswissenschaftler relevant sind. Alle Inhalte werden auf elementarem Niveau, d.h. ohne Beweise dargestellt. Vertiefende Aspekte oder Spezialfälle werden meist nicht diskutiert.
- Für jedes Kapitel werden entsprechende Übungsaufgaben mit Lösungshinweisen bereitgestellt.
- Zu jedem Kapitel werden ökonomische Anwendungen präsentiert. Diese stammen weitgehend aus den Bereichen der Mikro- und Makroökonomik.
- Fehlerreport bitte an: m.pasche@wiwi.uni-jena.de.

Zum Literaturstudium können beispielsweise folgende Bücher empfohlen werden:

Beckmann, M.J., Künzi, H.P., Mathematik für Ökonomen. Bd. 1, 2, 3. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Clausen, M., Kerber, A., Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler. München, Wien, Zürich.

Gal, T. et al., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Heidelberg.

Leydold, Matheematik für Ökonomen, 2. Aufl., Oldenbourg Verlag 2000.

Purkert, W., Brückenkurs Mathematik. Teubner Verlag.

Schwarze, J., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Bd. 1, 2, 3. Herne, Berlin: Verlag NWB.

1 Elementare Grundlagen

1.1 Wichtige Rechenregeln

Binomische Formeln:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\
(x+y)(x-y) &= x^2 - y^2
\end{aligned}
$$

Potenz- und Wurzelgesetze:

$$
\begin{array}{lll}
x^n \cdot x^m = x^{n+m} & x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n & x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \\
\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m} & (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n & x^0 = 1 \quad \text{für } x \neq 0 \\
\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} & \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}
\end{array}
$$

Logarithmusgesetze:

Sei $a^y = x$ mit $a, x > 0$ und $a \neq 1$. Dann ist $\log_a x = y$.
Es heißt a die *Basis* des Logarithmus.

$$
\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a(x^n) = n \log_a x \qquad \log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x
$$

$$
\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y
$$

Für die spezielle Basis $a = e$ (Eulersche Zahl) spricht man auch vom *natürlichen* Logarithmus und schreibt $\ln x$. Es gilt:

$$
\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}
$$

Lösung von quadratischen Gleichungen:

Gegeben sei $x^2 + px + q = 0$. Die zwei Lösungen lauten:

$$
x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
$$

Achtung: Falls $(p/2)^2 - q < 0$, dann sind die Lösungen $x_{1,2}$ *komplexe* Zahlen. Falls $(p/2)^2 - q = 0$, dann ist $x_1 = x = 2$.

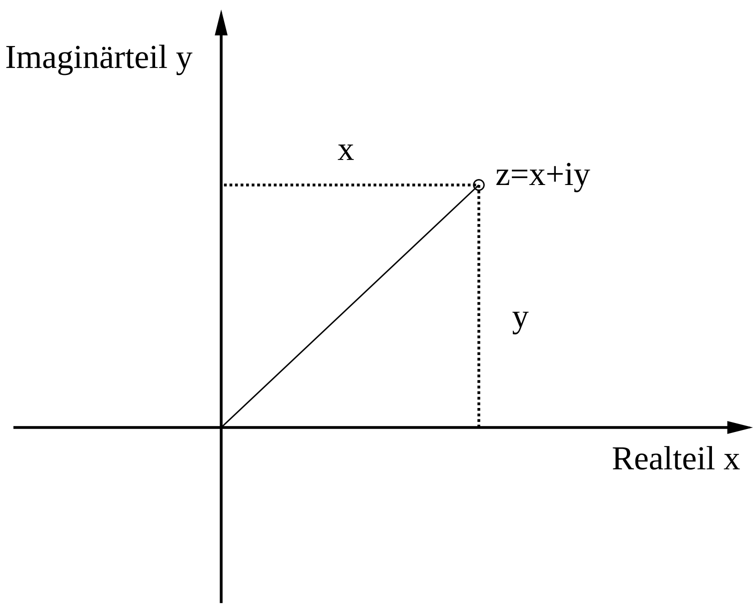
Reelle und komplexe Zahlen:

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in der Menge der reellen Zahlen. Man definiere eine *imaginäre* Einheit $i = \sqrt{-1}$ als Lösung dieser Gleichung.

Eine *komplexe Zahl* ist ein Ausdruck in der Form $z = x + iy$ mit x, y als reellen Zahlen und i als der imaginären Einheit. Es heißt x der *Realteil* und y der *Imaginärteil* von z. Offenbar ist die Menge der reellen Zahlen in der Menge der komplexen Zahlen als Spezialfall enthalten (nämlich alle z mit $y = 0$).

Es heißt $\bar{z} = x - iy$ die zu $z = x + iy$ *konjugiert komplexe Zahl*.

Komplexe Zahlen können auf der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden (vgl. Abbildung). Das Rechnen mit komplexen Zahlen wird hier nicht behandelt.



Summen- und Produktzeichen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

1.2 Grenzwerte, Folgen und Summen

Folgen und Reihen bzw. Summen:

Es ist $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ bzw. $\{x_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine *Folge* und $x_i,\ 1 \leq i \leq n$ ist ein *Glied* der Folge.

Dagegen ist $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + ...$ bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ eine *unendliche Reihe* oder auch *unendliche Summe*. Für $\sum_{i=1}^{n} x_i$ mit $n < \infty$ spricht man von der n-ten *Teilsumme*.

Gilt für die Glieder einer Folge $x_{n+1} - x_n = const$, dann bezeichnet man dies als *arithmetische Folge*. Gilt für die Glieder der Folge x_{n+1}/x_n=const, so bezeichnet man dies als *geometrische Folge* (analog für Reihen).

Wichtige Summen:

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1$$

$$x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \quad \text{für } |x| < 1$$

Grenzwerte von Folgen und Reihen:

Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $\bar{x}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ gibt, so dass $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$ gibt. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ (sog. Limes).

Gegeben sei eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ und die n-te Teilsumme $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Dann ist $\{S_n\}$ die *Folge der Teilsummen*. Konvergiert diese Folge der Teilsummen für $n \to \infty$, so ist

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

der *Grenzwert der (unendlichen) Summe.*

Zu beachten ist, dass solche Grenzwerte nicht notwendigerweise existieren müssen! Man beachte, dass man auch Grenzwerte von Funktionen bestimmen kann ($\{y_n\} = \{f(x_n)\}$).

Rechnen mit Grenzwerten:

Gegeben seien zwei konvergente Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$. Ferner sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = \bar{x} - a \qquad \lim_{n\to\infty}(ax_n) = a\bar{x}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \bar{x} - \bar{y} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \bar{x} + \bar{y}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \bar{x}\bar{y} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = \bar{x}/\bar{y}$$

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828... = e \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{für } |x| < 1$$

1.3 Ökonomische Anwendungen

Multiplikatoranalyse:

Gegeben sei ein einfaches keynesianisches Gütermarktmodell mit einer Konsumfunktion $C(Y) = C^a + cY$ ($C^a > 0$ ist der autonome Konsum, $0 < c < 1$ ist die marginale Konsumneigung) und autonomen Investitionen $I = I^a$. Die geplante gesamtwirtschaftliche Nachfrage ist $Y^D = C(Y) + I$. Im Gleichgewicht entspricht die geplante Nachfrage dem Einkommen ($Y^D = Y$). Das Gleichgewichtseinkommen ist demnach

$$Y = Y^D = C^a + cY + I^a$$
$$\Rightarrow Y - cY = C^a + I^a$$
$$\Rightarrow Y^* = \frac{C^a + I^a}{1-c}$$

Die autonomen Investitionen erhöhen sich in $t = 1$ nun dauerhaft um ΔI. Es sei angenommen, dass die zusätzliche Nachfrage sofort durch Ausdehnung der Produktion (und damit des Einkommens) befriedigt werden kann, der Konsum in Periode t aber verzögert vom Einkommen abhängt: $C_t = C(Y_{t-1})$. Die Erhöhung der autonomen Investitionen löst eine *Folge* periodenbezogener Anpassungen hervor, und das Einkommen entwickelt sich als *Summe* der Ergebnise dieser Anpassungen. Im Ausgangszustand sei $Y_{t-1} = Y_t = Y^*$:

t	I_t	C_t	ΔC_t	Y_t	ΔY_t	$\sum_{i=0}^{t} \Delta Y_i$
0	I^a	$C^a + cY_0$	0	$Y_0 = Y^*$	0	0
1	$I^a + \Delta I$	$C^a + cY_0$	0	$Y_1 = Y_0 + \Delta I$	ΔI	ΔI
2	$I^a + \Delta I$	$C^a + cY_1$	$c\Delta I$	$Y_2 = Y_0 + \Delta I + c\Delta I$	$c\Delta I$	$\Delta I + c\Delta I$
3	$I^a + \Delta I$	$C^a + cY_2$	$c^2\Delta I$	$Y_3 = Y_0 + \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I$	$c^2\Delta I$	$\Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I$
$\vdots$						$\vdots$
∞	$I^a + \Delta I$	$C^a + cY^{**}$	$c^\infty\Delta I$	$Y^{**} = Y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c^k\Delta I$	$c^\infty\Delta I$	$\sum_{k=0}^{\infty} c^k\Delta I$

Jede Erhöhung des Einkommens bewirkt eine (kleinere) Erhöhung des Konsums in der Folgeperiode (Spalte 4) und damit wiederum eine Erhöhung des Einkommens (Spalte 6). Spalte 6 ist eine *konvergente Folge* von Einkommenserhöhungen mit dem Grenzwert $c^{\infty}\Delta I = 0$. Spalte 7 ist die *Summe* dieser Einkommenserhöhungen und damit die Differenz zum ursprünglichen Gleichgewichtseinkommen. Der Grenzwert dieser Summe ist

$$Y^{**} - Y^{*} = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c^k \Delta I = \frac{1}{1-c}\Delta I$$

Mit $\Delta Y^* = Y^{**} - Y^*$ und Teilen beider Seiten durch ΔI erhält man den bekannten Multiplikator

$$\frac{\Delta Y^*}{\Delta I} = \frac{1}{1-c} > 1 \quad \text{wegen } 0 < c < 1$$

Man kann auch den Wert der n-ten Teilsumme und damit die Multiplikatorwirkung nach n Perioden analytisch bestimmen:

$$\Delta Y_n = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + ... + c^{n-1}\Delta I$$

Multiplikation mit c ergibt

$$c\Delta Y_n = c\Delta I + c^2\Delta I + c^3\Delta I + ... + c^n\Delta I$$

Bildung der Differenz beider Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}(1-c)\Delta Y_n &= (1-c^n)\Delta I \\ \frac{\Delta Y_n}{\Delta I} &= \frac{1-c^n}{1-c}\end{aligned}$$

Dieser Multiplikator für n Perioden ist kleiner als $1/(1-c)$. Für $n \to \infty$ ist $c^n \to 0$.

Giralgeldschöpfungsprozess:

Eine Geschäftsbank erhält von einem Kunden eine bestimmte zusätzliche Zentralbankgeldmenge ΔZ, die als (zusätzliches) Sichtguthaben bzw. Giralgeld gutgeschrieben wird: $\Delta G = \Delta Z$. Einen Teil r ($0 < r < 1$, Mindestreservesatz) dieser Einlagen muss die Bank bei der Zentralbank als Mindestreserve halten, die Überschussreserve steht zur Kreditvergabe zur Verfügung. Ein weiterer Kunde erhält diesen Kredit in voller Höhe, also $(1-r)\cdot\Delta Z$, in Form einer Überweisung auf sein Girokonto bei einer (evtl. anderen) Bank. Dadurch erhöht sich das Giralgeldvolumen wiederum und zwar um $(1-r)\Delta Z$, insgesamt also um $\Delta Z + (1-r)\Delta Z$. Auch diese Bank muss auf die erneute Einlage in Höhe von $(1-r)\Delta Z$ eine Mindestreserve halten, der Rest $(1-r)^2 \cdot \Delta Z$ steht zur weiteren Kreditvergabe zur Verfügung. Wird auch dieser Kredit vergeben und (ggf. nach einigen Transaktionen) wieder auf irgendein Griokonto eingezahlt, dann hat sich die Giralgeldmenge um

$$\Delta G = \Delta Z + (1-r)\Delta Z + (1-r)^2\Delta Z$$

erhöht. Dieser kumulative Prozess setzt sich fort. Vorausgesetzt, dass die Kreditnachfrage nicht nachlässt, erhält man eine Summe mit dem Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-r)^k \Delta Z = \frac{1}{1-(1-r)}\Delta Z = \frac{1}{r}\Delta Z$$

den man auch als *Giralgeldschöpfungspotenzial* bezeichnet. Es ist folglich

$$G = \frac{1}{r}Z \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta G = \frac{1}{r}\Delta Z$$

mit $1/r$ als dem Giralgeldschöpfungsmulitiplikator.

Abdiskontierung zukünftiger Zahlungsströme:

Erwartet ein Investor einen Zahlungsstrom $\{z_t\}$ für $t = 0..T$ und kalkuliert mit einem Zinssatz von i, dann der *Barwert* des Zahlungsstroms die *Summe* der abdiskontierten Zahlngen:

$$BW = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{T} q^t z_t$$

mit $q = 1/(1+i)$ als dem Abzinsungsfaktor (Diskontfaktor). Für einen unendlichen und konstanten Zahlungsstrom $z_t = z_{t+1} = z \; \forall t$ ist der Grenzwert

$$BW = \sum_{t=0}^{\infty} q^t z = \frac{1}{1-q} z = \frac{1+i}{i} z$$

2 Lineare Algebra

2.1 Vektoren

Vektorraum und Dimension

Als *Vektorraum* betrachten wir hier den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, also die Menge aller geordneten reellen Zahlentupel $(x_1, ..., x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Es ist n die *Dimension* des Vektorraumes.

Vektoren

Ein *Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ besteht aus n Zahlen (Koordinaten oder Komponenten) $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, ist also ein Element des Vektorraumes. Je nach Darstellungsform unterscheidet man *Spalten-* und *Zeilenvektoren*:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$$

mit ^{T} als dem Zeichen für eine *Transposition* (alternatives Zeichen: $'$). Bei der Transposition werden Spalten und Zeilen vertauscht.

Besondere Vektoren sind die *Einheitsvektoren* (kanonische Vektoren):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Linearkombination und lineare Unabhängigkeit:</u>

Gegeben seien die k Vektoren $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ eines Vektorraumes und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ seien reelle Zahlen. Dann heißt

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 + ... + \lambda_k \mathbf{x}^k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}^j$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ mit den Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Die Vektoren $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ sind *linear unabhängig*, wenn gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$$

Andernfalls ließe sich mindestens einer der k Vektoren als Linearkombination der restlichen $k-1$ Vektoren darstellen. In diesem Fall sind die Vektoren *linear abhängig*.

<u>Basis:</u>

Die Vektoren $\mathbf{x}^1, ...\mathbf{x}^k$ bilden eine *Basis* des Vektorraumes, wenn sich jedes Element $\mathbf{x}$ des Vektorraumes als Linearkombination von $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ darstellen lässt. Die Koeffizienten $\lambda_1, .., \lambda_k$ sind dann die *Koordinaten des Vektors* $\mathbf{x}$ *bezüglich der Basis* $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ (Beispiel: Einheitsvektoren bilden die sog. *Standardbasis*). Man sagt auch, der Vektorraum werde duch die Basis *aufgespannt*.

2.2 Matrizen

Eine $(m \times n)$-*Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein System von reellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (mit $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$), die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{,2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(m,n)}$$

Ein Vektor kann als Spezialfall einer Matrix (nämlich als $(n \times 1)$-Matrix bzw. als $(1 \times n)$-Matrix) aufgefasst werden.

Bei der *transponierten* Matrix $\mathbf{A}^T$ werden Zeilen und Spalten vertauscht. Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Für $m = n$ heißt die Matrix $\mathbf{A}$ *quadratisch*. Die Elemente $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ bilden die *Hauptdiagnoale* der Matrix. Eine Matrix, bei der alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen Null sind, heißt, obere (untere) *Dreiecksmatrix*.

Besondere quadratische Matrizen sind die *Einheitsmatrix* $\mathbf{I}$ und die *Nullmatrix* $\mathbf{0}$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einer vorgegebenen Zeilen- bzw. Spaltenzahl n schreibt man $\mathbf{I}_n$ bzw. $\mathbf{0}_n$. Es gilt: $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ und $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$.

Es gilt für zwei $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$	wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle Elemente
$\mathbf{A} > \mathbf{B}$	wenn $a_{ij} > b_{ij}$ für alle Elemente
$\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$	wenn $a_{ij} > b_{ij}$ für mindestens ein Element und für alle anderen $a_{ij} = b_{ij}$
$\mathbf{A} \geqq \mathbf{B}$	wenn $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Dies gilt folglich auch für den Fall $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Dann heißt $\mathbf{A}$

positiv	wenn $\mathbf{A} > \mathbf{0}$
semipositiv	wenn $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$
nichtnegativ	wenn $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$

2.3 Rechenregeln für Vektoren und Matrizen

Addition:

Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beides $(m \times n)$-Matrizen, so ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$$

Dieses elementweise Addieren gilt analog für Vektoren, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda a_{ij})_{(m,n)}$$

Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt):

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ drei Spaltenvektoren, dann ist das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gegeben durch

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}' \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Das Ergebnis ist ein Skalar. Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

- Es gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq 0$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ der Nullvektor ist.
- Es gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.
- Es gilt $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^T \mathbf{z} = \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y}^T \mathbf{z})$ für beliebige reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Es ist $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ die *Länge* des Vektors $\mathbf{x}$.
- Es ist $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ genau dann, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Multiplikation zwieer Matrizen:

Sei $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix und $\mathbf{B}$ eine $(n \times k)$-Matrix, so ist das Produkt

$$\mathbf{A}\ \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})_{(m,k)} \qquad \text{mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Eine Multiplikation ist nur möglich, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt. Die Reihenfolge der Mtatrizen ist daher bei der Multiplikation *nicht* beliebig.

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor:

Sei $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix und $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ein *Spalten*vektor im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T \quad \text{mit } y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k$$

Das Ergebnis ist also ein Spaltenvektor im $\mathbb{R}^m$. Man nennt diese Multiplikation auch *Anwendung* der Matrix $\mathbf{A}$ auf den Vektor $\mathbf{x}$, weil die Matrix $\mathbf{A}$ als eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ auf den $\mathbb{R}^m$ aufgefasst werden kann.

Nullteiler:

Für Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab = 0$ genau dann, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Das ist bei Matrizen nicht der Fall. Aus $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ folgt *nicht* notwendigerweise $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

<u>Inverse Matrix:</u>

Für einen Skalar $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a^{-1} = 1/a$. Diese Operation ist bei Matrizen nicht auf diese Weise möglich. Sei $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$-Matrix. Dann ist eine *inverse* Marrix $\mathbf{A}^{-1}$ gegeben, wenn

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

Nicht jede quadratische Matrix besitzt eine entsprechende Inverse! Für nicht-quadratische Matrizen gibt es verallgemeinerte Inversen, auf die hier nicht eingegangen wird.

2.4 Inversen und Determinanten

<u>Determinante einer Matrix:</u>

Die Definition der Determinanten orientiert sich daran, dass ein Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen gefunden werden soll. Die lineare Gleichung $ax = b$ ist genau dann nach x lösbar, wenn $a \neq 0$, denn dann existiert $a^{-1} = 1/a$ und die Lösung ist $x = b/a$. Für einen Skalar gilt: $\det a = a$.

Für jede (quadratische) $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ kann deren Determinante bestimmt werden:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |\mathbf{A}_{ik}|$$

wobei $\mathbf{A}_{ik}$ die Matrix ist, die aus $\mathbf{A}$ durch Wegstreichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht. Man spricht auch von der *Entwicklung nach der i-ten Zeile.* $\mathbf{A}_{ij}$ ist eine *Untermatrix* von $\mathbf{A}$.

Wir befassen uns überwiegend (2×2)- und (3×3)-Matrizen. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\mathbf{A}_{i2}| \\
&\qquad\qquad\; = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\qquad\qquad\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

Letzteres ist die "Regel von Sarrus". Merkschema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
& \searrow & & \times & & \times & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
& \nearrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}$$

Eigenschaften einer Determinante:

- Die Determinante einer Matrix bleibt konstant, wenn ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.
- Die Determinante ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen (Spalten) vertauscht werden.
- Es gilt $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- Es gilt $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det \mathbf{A}$.
- Es gilt $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.
- Es gilt $\det \mathbf{A} \neq 0$ genau dann, wenn $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

Rang einer Matrix:

Der Rang $Rg(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten (Spaltenrang) bzw. Zeilen (Zeilenrang). Es gilt für alle Matrizen: In jeder Matrix ist der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang (oder kurz: Rang).
Sei $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix. Es gilt:

- $Rg(\mathbf{A}) \leq m$ und $Rg(\mathbf{A}) \leq n$.
- Für eine quadratische Matrix $(m = n)$ gilt $Rg(\mathbf{A}) = n$ genau dann, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$, d.h. wenn $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.
- Es bleibt $Rg(\mathbf{A})$ bei elementaren Umformungen konstant. Solche Umformungen sind:
  - Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen
  - Multiplizieren einer Spalte oder Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$.
  - Addieren eines Vielfaches einer Spalte oder Zeile zu einer anderen.

Hat eine Matrix $\mathbf{A}$ mit n Zeilen oder Spalten den Rang n (den "vollen Rang"), so heißt diese Matrix auch *regulär*. Ist $Rg(\mathbf{A}) < n$, so ist die Matrix *singulär*. Für quadratische Matrizen gilt folglich: $\mathbf{A}^{-1}$ existiert und es ist $\det \mathbf{A} \neq 0$ genau dann, wenn $\mathbf{A}$ regulär ist, d.h. den vollen Rang hat.

Berechnung des Rangs durch das Gauss–Verfahren:

Durch rangerhaltende Umformungen wird die Matrix auf eine *Dreiecksform* gebracht, bei der unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Dies geschieht nach folgendem Algorithmus:

1. Beginne bei a_{11}. Multipliziere die erste Zeile mit $c_{21} = a_{21}/a_{11}$ und ziehe sie von der zweiten Zeile ab. Multipliziere dann die erste Zeile mit $c_{31} = a_{31}/a_{11}$ und ziehe sie von der dritten Zeile ab usw. Im Ergebnis stehen in der ersten Spalte ab dem Element a_{11} nur Nullen.

2. Fahre fort mit a_{22}. Multipliziere die zweite Zeile mit $c_{32} = a_{32}/a_{22}$ und ziehe sie von der dritten Zeile ab. Wiederhole dies analog mit der vierten Zeile usw.. Im Ergebnis stehen in der zweiten Spalte ab dem Element a_{22} nur Nullen.

3. Fahre mit den Elementen der Hauptdiagonalen solange fort, wie es noch Zeilen gibt.

Anschließend entferne man (sofern vorhanden) die Zeilen, welche nur Nullen enthalten. Die Zahl der verbleibenden Zeilen gibt den Rang an.

Hat man den nach dem Gauss-Verfahren eine obere Dreiecksmatrix gebildet, ist auch leicht die Determinante abzulesen. Sie ergibt sich aus dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen. Wurden im Zuge des Gauss-Verfahrens Zeilen oder Spalten vertauscht, so ist die Zahl der Vertauschungen zu berücksichtigen: Bei einer geraden Zahl von Vertauschungen bleibt das Vorzeichen erhalten, bei einer ungeraden Zahl kehrt es sich um.

<u>Inverse einer Matrix:</u>

Für die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ gilt: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Sie existiert genau dann, wenn $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \neq 0$, die Matrix also regulär ist. Berechung der Inversen: Vorausgesetzt, die Inverse existiert, dann ist

$$\mathbf{A}^{-1} = (a^*_{ij})^T_{(n,n)} \quad \text{mit} \quad a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{|\mathbf{A}_{ij}|}{|\mathbf{A}|}$$

$$\text{alternative Notation:} \qquad = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\left((-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|\right)^T_{(n,n)}$$

wobei man die Matrix $((-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|)^T_{(n,n)}$ auch *Adjungierte* nennt.

Ein Element $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$ der Adjungierten heißt auch *Adjunkte* oder *Kofaktor* des Elements a_{ij}. Die Determinante $|\mathbf{A}_{ij}|$ heißt *Minor* von a_{ij}. Beispiel: Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad |\mathbf{A}| = 2$$

Die Minoren sind

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{11}| = 1, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{12}| = 1, \mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{13}| = 1$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{21}| = -1, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{22}| = 1, \mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{23}| = 1$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{31}| = -1, \mathbf{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{32}| = -1, \mathbf{A}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}_{33}| = 1$$

Zusammen mit den durch $(-1)^{i+j}$ bestimmten Vorzeichen erhält man

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

2.5 Lineare Gleichungssysteme

Definition

Ein lineares Gleichungssytem ist gegeben durch $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A}$ als einer $(m \times n)$-Matrix und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ausgeschrieben lautet das System:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Lösung:

Die Lösungsmenge lautet

$$L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$$

Das lineare System kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Im Fall unendlich vieler Lösungen existieren stets k Vektoren aus der Lösungsmenge dergestalt, dass sich jedes Element der Lösungsmenge als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Beziehungen zum Rang von $\mathbf{A}$:

Es gelten folgende Aussagen:

- Es existiert genau dann mindestens eine Lösung, wenn $Rg(\mathbf{A}) = Rg(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ mit $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ als der um den Spaltenvektor $\mathbf{b}$ erweiterten Matrix $\mathbf{A}$.
- Für $m < n$, also weniger Gleichungen als Unbekannte, existiert keine eindeutige Lösung, weil $Rg(\mathbf{A}) \leq m < n$.
- Für $m > n$, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte, und $Rg(\mathbf{A}) = n$ existiert entweder keine Lösung (falls $Rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > Rg(\mathbf{A})$), oder genau eine Lösung (falls $Rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = Rg(\mathbf{A})$).
- Für $m > n$, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte, und $Rg(\mathbf{A}) < n$ existiert entweder keine Lösung (falls $Rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > Rg(\mathbf{A})$), oder es existieren unendlich viele Lösungen (falls $Rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = Rg(\mathbf{A})$).

- Für $m = n$ und $Rg(\mathbf{A}) = n$ existiert immer eine eindeutige Lösung.

Lösung durch Gauss-Verfahren:

Man konstruiere eine erweiterte Koeffizientenmatrix in der folgenden Gestalt:

$$\mathbf{A}_0 = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Beginnend mit der ersten Koeffizientenzeile führe man wieder den oben beschriebenen Gauss-Algorithmus durch, um diese erweiterte Matrix in eine Dreiecksform zu bringen, wobei die Transformation sich auch auf die b_i der letzten Spalte auswirken. Die nach jedem Transformationsschritt entstehenden Matrizen heißen $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}$. In Abhängigkeit von $r = Rg(\mathbf{A})$ ist dann die Lösung (sofern sie existiert) durch sukzessives Einsetzen zu ermitteln. Ist das System unterbestimmt, d.h. gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen, so können die Variablen $x_{t+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ beliebig gewählt und die restlichen durch sukzessives Einsetzen ermittelt werden.

Lösung mit Hilfe der Inversen:

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix. Wenn $\mathbf{A}$ regulär ist, d.h. den vollen Rang besitzt, dann existiert die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ und die Lösung des Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lautet:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Lösung mit Hilfe der Cramerschen Rgel:

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische reguläre Matrix, d.h. $|\mathbf{A}| \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$. Die Komponenten des Vektors lassen sich nach der Cramerschen Regel bestimmen:

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}$$

mit $\mathbf{A}_i$ als der Matrix, die aus $\mathbf{A}$ dadurch entsteht, dass die i-te Spalte durch den Vektor $\mathbf{b}$ ersetzt wurde. Gegenüber der Methode der Bestimmung der Inversen hat dies den Vorteil, dass weniger Determinanten ausgerechnet werden müssen. Besonders vorteilhaft ist die Cramersche Regel, wenn nicht alle Komponenten des Lösungsvektors benötigt werden.

2.6 Ökonomische Anwendungen

Budgetbeschränkung:

Der nutzenmaximierende Haushalt unterliegt einer Budgetbeschränkung dergestalt, dass die Summe aller Ausgaben (Preise · Mengen) höchstens so groß sein darf wie das zur

Verfügung stehende Budget B, also $x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n \leq B$, in Vektorschreibweise $\mathbf{x}^T\mathbf{p} \leq B$. Außerdem muss das zu bestimmende Güterbündel semipositiv sein, also $\mathbf{x} \geq 0$.

Inout-Output-Analyse:

In einer Volkswirtschaft gebe es mehrere Sektoren, die produzierte Waren an andere Sektoren sowie an die Endnachfrage liefern. Andererseits setzt jeder Sektor Waren aus anderen Sektoren sowie Faktorleistungen für die Produktion ein. In physischen Enheiten gerechnet ergibt sich folgendes Input-Output-Modell:

	Sektor 1	Sektor 2	...	Sektor n	Endnachfrage	Gesamtoutput
Sektor 1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}	w_1	q_1
Sektor 2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}	w_2	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Sektor n	q_{n1}	q_{n2}	...	q_{nn}	w_n	q_n
Faktor 1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1n}		m_1
Faktor 2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2n}		m_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Faktor k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{kn}		m_k

mit folgenden Bezeichnungen:

q_{ij}	Lieferungen von Sektor i and Sektor j
w_i	Lieferungen von Sektor i an die Endnachfrage
q_i	Gesamtoutput von Sektor i
m_{ij}	Einsatzmenge des Faktors i in Sektor j
m_i	insgesamt eingesetzte Menge des Faktors i

Sei nun $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(n,n)}$ mit $a_{ij} = q_{ij}/q_j$ als den *Verbrauchskoeffizienten* der Sektoren, sowie $\mathbf{B} = (b_{ij})_{(k,n)}$ mit $b_{ij} = m_{ij}/q_j$ als den *Aufwandskoeffizienten* de der Sektoren. Dann lautet für die Bilanzgleichung für den Verbrauch:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Aq} + \mathbf{w}$$

und die Bilanzgleichung für den Aufwand ist:

$$\mathbf{m} = \mathbf{Bq}$$

Ist der Gesamtoutput bekannt, so kann man aufgrund der durch a_{ij} ausgedrückten technologischen Beziehungen die Endnachfrage ausrechnen:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}$$

Ist die Endnachfrage bekannt, so ergibt sich der Gesamtoutput durch

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{w}$$

Dabei heißt $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ die *Leontief-Inverse*. Die Koeffizientematrix muss bestimmte Eigenschaften erfüllen, damit der Lösungsvektor $\mathbf{q} > 0$ positiv, also ökonomisch sinnvoll ist. Entsprechend ist zur Befriedigung dieser Endnachfrage ein Faktoreinsatz in Höhe von

$$\mathbf{m} = \mathbf{Bq} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{w}$$

notwendig.

Multiplikatoren im keynesianischen IS-LM-Modell:

In einem keynesianischen IS-LM-Modell mit teils autonomen und teils zinsabhängigen Investitionen $I + I^0(i)$ mit $I_i^0 < 0$ (1. Ableitung von $I^0(i)$ nach i), autonomen Geldangebot $\bar{M}$ sowie einkommens- und zinsabhängiger Geldnachfrage $L(Y,i)$ mit $L_Y > 0$ und $L_i < 0$ (1. Ableitung von $L(Y,i)$ nach Y bzw. i) ist ein simultanes Gleichgewicht auf Güter- und Geldmarkt gegeben durch

$$\begin{aligned} C(Y) + I^0(i) + I &= Y \\ L(Y,i) &= \bar{M} \end{aligned}$$

Gesucht ist die Änderung des Gleichgewichts bei einer dauerhaften Änderung der autonomen Investitionen I. Differenzieren nach I ergibt

$$\begin{aligned} C_Y \cdot Y_I + I_i^0 \cdot i_I + 1 &= Y_I \\ L_Y \cdot Y_I + L_i \cdot i_I &= 0 \end{aligned}$$

Rearrangement der Terme ergibt

$$\begin{aligned} (C_Y - 1)Y_I + I_i^0 \cdot i_I &= -1 \\ L_Y \cdot Y_I + L_i \cdot i_I &= 0 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (C_Y - 1) & I_i^0 \\ L_Y & L_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_I \\ i_I \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Die Determinanten zur Anwendung der Cramerschen Regel sind

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} (C_Y - 1) & I_i^0 \\ L_Y & L_i \end{vmatrix} = L_i(C_Y - 1) - L_Y I_i^0 \\ |\mathbf{A}_1| &= \begin{vmatrix} -1 & I_i^0 \\ 0 & L_i \end{vmatrix} = -L_i \\ |\mathbf{A}_2| &= \begin{vmatrix} (C_Y - 1) & -1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix} = L_Y \end{aligned}$$

Lösungen nach Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dI} = Y_I = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} &= \frac{L_i}{(1 - C_Y)L_i + L_Y I_i^0} > 0 \\ \frac{di}{dI} = i_I = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} &= \frac{-L_Y}{(1 - C_Y)L_i + L_Y I_i^0} > 0 \end{aligned}$$

Dies sind der Einkommens- und Zinsmultiplikator für eine Veränderung der autonomen Investitionen.

3 Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Begriff und Eigenschaften von Funktionen

Gegeben seien zwei *Mengen* D_f und W. Es heißt D_f auch der *Definitionsbereich* fon f und W der *Wertebereich*. Eine *Funktion* f ordnet jedem Element aus D_f eindeutig ein Element von W zu. Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : D_f &\to W \\ y &= f(x) \quad \text{mit } x \in D_f, y \in W \end{aligned}$$

Es heißt x auch die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable, wobei noch nichts über tatsächliche (ökonomische) Kausalitäten ausgesagt ist.

Für *reellwertige* Funktionen f ist $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$, und falls der gesamte Definitions- und Wertebereich zugelassen ist, schreibt man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion einer reellwertigen Variablen kann in einem *Koordinatensystem* grafisch dargestellt werden.

Ordnet f jedem $x \in D_f$ teilweise mehrere Elemente des Wertebereichs zu, so spricht man von einer Funktion *im weiteren Sinn* oder genauer von einer *Korrespondenz* (wird hier nicht weiter behandelt).

Eine Abbildung oder Funktion f ist *eineindeutig (injektiv)*, wenn jedee Element des Wertebereiches W genau einmal als Bildpnkt $x \in D_f$ vorkommt, also

$$x_1, x_2 \in D_f \quad \text{mit } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Für eineindeutige Funktionen existiert eine *Umkehrfunktion* f^{-1} mit

$$\begin{aligned} f^{-1} : W &\to D_f \\ x &= f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Sei $y = f(x)$ und $z = g(y)$. Dann ist g eine *zusammengesetzte* Funktion $z = g(f(x)) = h(x)$ und man schreibt dafür $h = f \circ g$.

Es ist $y = f(x)$ eine *explizit* formulierte Funktion. Dann heißt $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$ eine *implizite* Funktion .

Eine Funktion heißt *stetig an der Stelle* x_0, wenn sich zu jedem beliebig kleinen $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ finden lässt, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt. Gilt dies für alle $x_0 \in D_f$, dann heißt die Funktion f insgesamt *stetig*. Alternativ: Eine Funktion f heißt *stetig*, wenn $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. wenn der Abstand der Bildpunkte aus dem Definitionsbereich infinitesimal klein wird, dann ist auch die Differenz der Punkte des Wertebereichs infinitesimal klein, also im Grenzfall $x \to x_0$ identisch. Es gibt folglich keine "Sprünge" in der Funktion.

Eine Element x_0 des Definitionsbereichs heißt *Nullstelle* von f, wenn $f(x_0) = 0$.

3.2 Spezielle Funktionen: Logarithmus- und Exponentialfunktion

Wir beschäftigen uns nur mit speziellen Exponentialfunktionen in der Form

$$y = ca^{f(x)}, \quad a > 0$$

wobei spezielle Varianten sein können: $a = e$ (Euelersche Zahl als Basis) und $f(x) = x$ als Exponent. Der Exponent kann auch negativ sein.

Die Logarithmusfunktion $x = \log_a y$ ist die Umkehrfunktion zu $y = a^x$.

3.3 Differentiation

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Der *Differenzenquotient* wird gebildet durch

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

und der *Differentialquotient* ist dann der Grenzwert

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x}$$

Der Differentialquotient ist eine *lineare Approximation* der Funktion f an der Stelle x und heißt auch *1. Ableitung* der Funktion f an der Stelle x.

Eine Funktion, bei der in $x \in D_f$ der Differentialquotient existiert, heißt *differenzierbar im Punkt* x. Ist die Funktion für alle $x \in D_f$ differenzierbar, so heißt die Funktion insgesamt *differenzierbar*.

Für die 1. Ableitung kann ggf. wiederum der Differentialquotient bestimmt werden. Existiert dieser an der Stelle x, so heißt die Abbildung $f''(x)$ die *2. Ableitung* von f an der Stelle x. Existieren die ersten und zweiten Ableitungen für alle Punkte $x \in D_f$, so heißt die Funktion *zweifach differenzierbar*.

Sind die ersten (zweiten) Ableitungen der Funktion stetig, so heißt die Funktion f auch einfach (zweifach) *stetig differenzierbar*.

Die **Differentiationsregeln**:

$$
\begin{aligned}
(x^a)' &= a x^{a-1}, \qquad a \in \mathbb{R} \\
(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x) \\
(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad \text{(Produktregel)} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{(Quotientenregel)} \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)} \\
\left(f^{-1}(x)\right)' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}
\end{aligned}
$$

Ableitung wichtiger Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f(x) = a^x,\ a > 0 \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = a^x \ln a \\
f(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = e^x \\
f(x) = \log_a(x),\ a > 0, a \neq 1 \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \\
f(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Charakterisierung einiger Funktionseigenschaften anhand der 1. Ableitung:
Gilt für alle $x \in I \subseteq D_f$:

$f'(x) \geq 0$, so ist f auf I monoton steigend
$f'(x) > 0$, so ist f auf I streng monoton steigend
$f'(x) \leq 0$, so ist f auf I monoton fallend
$f'(x) < 0$, so ist f auf I streng monoton fallend
$f'(x) = 0$, so ist f auf I konstant

3.4 Taylorentwicklung

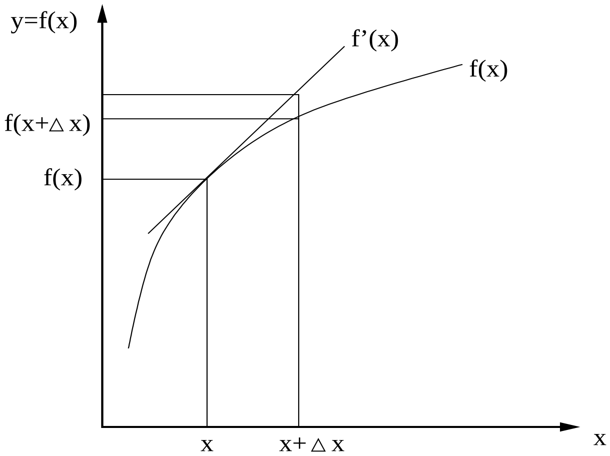
Der Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient ist, dass in letzterem Fall der Grenzübergang gebildet wird. Es gilt nun:

$$
\begin{aligned}
\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) &= f'(x)\Delta x + r(\Delta x) \\
\Rightarrow \qquad f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + r(\Delta x) \\
\text{mit} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{|\Delta x|} &= 0
\end{aligned}
$$

so dass für kleine Änderungen Δx der "Rest" $r(\Delta x)$ sehr klein wird, so dass approximativ gilt:

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

Dies ist die sog. *Taylorapproximation 1. Ordnung.* Der Funktionswert eines in der "Nähe" von x liegenden Punktes kann also näherungsweise durch die Ableitung von f an der Stelle x (als lineare Approximation) bestimmt werden.



Eine genauere Approximation erhält man, wenn die zweite (und ggf. noch höhere) Ableitung berücksichtigt wird. Die Taylorapproximation 2. Ordnung lautet dann:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2 + p(\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2$$

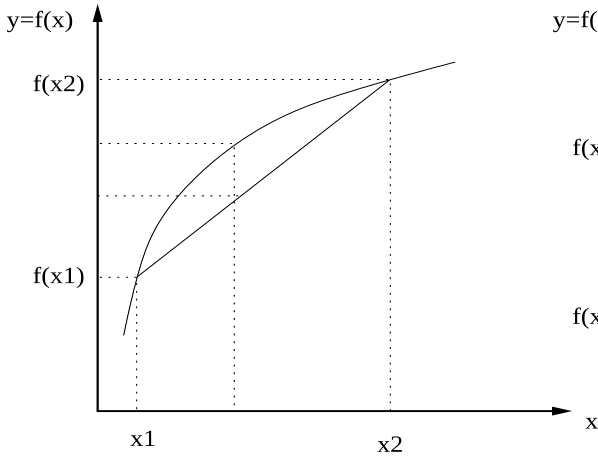
$$\text{mit} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0$$

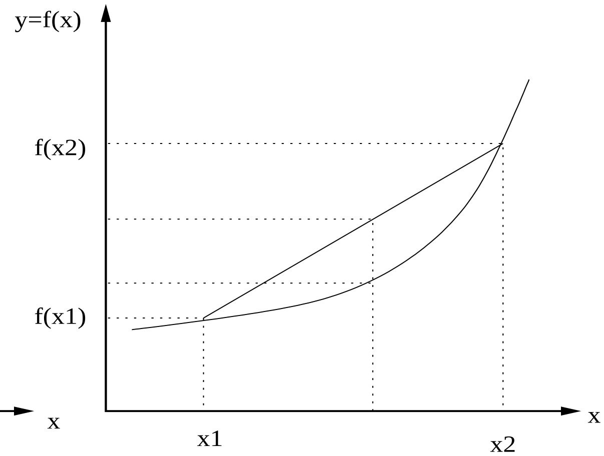
3.5 Konvexität und Konkavität

Eine Funktion heißt *konkav* auf einem Intervall $I \subseteq D_f$, wenn für zwei beliebige $x_1, x_2 \in I$ und ein $\alpha \in (0,1)$ gilt:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

bzw. *streng konkav*, wenn die strenge Ungleichung gilt. Eine Funktion heißt *(steng) konvex*, wenn die Ungleichung mit $\leq$ (bzw. $<$) gilt. Anschaulich: Bei einer konkaven (konvexen) Funktion liegt der Funktionswert einer Linearkombination aus zwei Punkten des Intervalls oberhalb (unterhalb) der Linearkombination der Funktionswerte dieser beiden Punkte.





DieKonkavität und Konvexität kann auch mit Hilfe der zweiten Ableitung charakterisiert werden: Gilt für alle $x \in I \subseteq D_f$:

$$f''(x) \geq 0, \text{so ist } f \text{ auf } I \text{ konvex}$$
$$f''(x) \leq 0, \text{so ist } f \text{ auf } I \text{ konkav}$$

Ferner gelten folgende Ungleichungen: Es ist f konkav auf I genau dann, wenn $f(x) - f(x+\Delta x) \leq f'(x+\Delta x)\Delta x$ für alle $x, x+\Delta x \in I$. Gilt die strenge Ungleicung, so heißt f streng konkav. Dasselbe gilt analog für Konvexität.

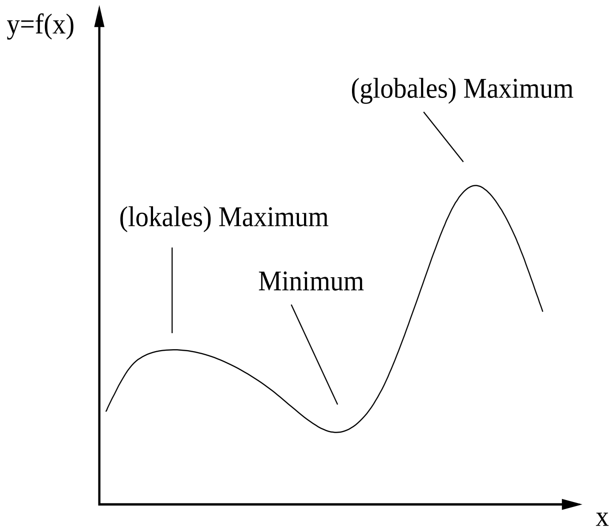
3.6 Extremwerte

Eine in der Ökonomik sehr häufige Problemstellung ist die Bestimmung von Extremwerten, also den oberen bzw. unteren Wendepunkten einer Funktion, vor allem bei Optimierungsproblemen. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegt in x_o ein (lokaler) Extremwert vor, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \quad \text{notwendige Beingung} \\ f''(x_0) &\neq 0 \quad \text{hinreichende Bedingung} \\ f''(x_0) &> 0 \quad \text{Extremwert = Minimum} \\ f''(x_0) &< 0 \quad \text{Extremwert = Maximum} \end{aligned}$$

Ist die 2. Ableitung gleich Null, so liegt ein Wendepnkt und kein Extremwert vor.

Eine Funktion kann mehrere lokale Minima bzw. Maxima besitzen. Das *globale* Maximum ist in x_0 gegeben, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$ (analog für das globale Minimum). Für ein lokales Maximum gilt: Es existiert $\epsilon > 0$, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U(x_0) \cap D_f$ mit $U(x_0) = |x - x_0| \leq \epsilon$.



3.7 Elastizitäten

Für viele ökonomische Fragestellungen sind Aussagen in der Art “Um wieviele Einheiten ändert sich $f(x)$, wenn sich x um eine Einheit ändert” problematisch, weil der Funktionsverlauf von der gewählten Skalierung (z.B. DM, TDM, Dollar, Euro) abhängt. Wichtiger sind daher Aussagen bezüglich der *relativen* (prozentualen) Änderung von Größen, die in *Elastizitäten* ausgedrückt werden:

$$\epsilon_{y,x}(x) = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Beispiel: Gegeben sei die Nachfragefunktion $x(p) = B/p$. Die direkte Preiselastizität der Nachfrage ist

$$\epsilon_{x,p} = -\underbrace{\frac{B}{p^2}}_{x'(p)} \cdot \frac{p}{x(p)} = -\frac{B}{p}\frac{1}{\frac{B}{p}} = -1$$

Interpretation: Eine Erhöhung des Preises um 1% führt zu einer Verringerung der Nachfrage um ebenfalls 1%.

Beispiel: Die Produktionselastizität des Faktors v bei einer Produktionsfunktion $y(v) = v^\alpha$ ist gegeben durch

$$\epsilon_{y,v} = \alpha v^{\alpha-1}\frac{v}{y(v)} = \alpha\frac{v^\alpha}{v^\alpha} = \alpha$$

3.8 Ökonomische Anwendungen

<u>Grenzkosten, Grenzerlöse, Grenzproduktivität:</u>

Zur Bestimmung der optimalen Angebotsmenge sind Kenntnisse der Grenzkosten und der

Grenzerlöse notwendig. Beispiele für Kosten- und deren Grenzkostenfunktionen sind:

$$\begin{aligned} K(x) = K^{fix} + cx \quad &\Rightarrow \quad K'(x) = c \\ K(x) = cx + dx^2 - ex^3 \quad &\Rightarrow \quad K'(x) = c + 2dx - 3ex^2 \\ K(x) = cx^\alpha \quad &\Rightarrow \quad K'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Gegeben sei eine lineare Nachfragefunktion $x(p) = a - bp$. Die Erlöse sind entsprechend $E(p) = (a - bx)p = ap - bp^2$. Die Grenzerlöse sind daher $E'(p) = a - 2bp$.

Gegeben sei eine partielle Produktionsfunktion $y = cv^\alpha$. Die *Durchschnittsproduktivität* ist gegeben durch $y/v = cv^\alpha/v = cv^{\alpha-1}$, die Grenzproduktivität ist gegeben durch $dy/dv = c\alpha v^{\alpha-1}$.

Gewinnmaximierung des Monopolisten:

Der Monopolist maximiert seinen Gewinn, d.h. er bestimmt den oberen Extremwert der Gewinnfunktion. Diese ist gegeben durch $G = p(x)x - K(x)$ mit $p(x) = a - x$ und $K(x) = cx^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} G(x) &= (a - x)x - cx^2 = ax - x^2 - cx^2 \\ G'(x) &= a - 2x - 2cx = 0 \quad \text{(notwendige Bedingung)} \\ \Rightarrow \qquad x^* &= \frac{a}{2 - 2c} \\ G''(x) &= -2 - 2c < 0 \quad \text{(hinreichende Bedingung für ein Maximum)} \end{aligned}$$

Da die 2. Ableitung negativ und konstant ist, ist die Funktion *streng konkav* auf $\mathbb{R}$. Folglich ist die Lösung x^* ein *globales* Maximum.

Angenommen, der Nachfrageparameter a sei variabel. Die gewinnmaximierende Lösung x^* hängt von a ab. Dann stellt $F'(a, x^*) = G'(a, x^*(a)) = 0$ (notwendige Bedingung) eine *implizite Funktion* dar.

Preis- und Einkommenselastizität der Nachfrage:

Gegeben seien zwei Güter x_1, x_2 mit den Preisen p_1, p_2. Die Nachfrage nach x_1 sei $x_1(p_1, p_2) = E \cdot (p_2/p_1)^\alpha$ mit E als dem Einkommen und $0 < \alpha < 1$. Unter Verwendung der Quotientenregel erhält man folgende Elastizitäten:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1,E} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha \cdot \frac{E}{x_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha \cdot \frac{E}{E\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha} = 1 \\ \epsilon_{x_1,p_1} &= -\alpha E \frac{p_2^\alpha}{p_1^{\alpha+1}} \cdot \frac{p_1}{E\frac{p_2^\alpha}{p_1^\alpha}} = -\alpha \frac{p_1 \cdot p_1^\alpha}{p_1^{\alpha+1}} = -\alpha \\ \epsilon_{x_1,p_2} &= \alpha E \frac{p_2^{\alpha-1}}{p_1^\alpha} \cdot \frac{p_2}{E\frac{p_2^\alpha}{p_1^\alpha}} = \alpha \frac{p_2^{\alpha-1} \cdot p_2}{p_2^\alpha} = \alpha \end{aligned}$$

Interpretation: Steigt das Einkommen um 1%, so steigt der Konsum x_1 um 1%. Steigt der Preis p_1 um 1%, so sinkt der Konsum x_1 um α%. Steigt der Preis des Substitutionsgutes p_2 um 1%, so steigt der Konsum von x_1 um α%.

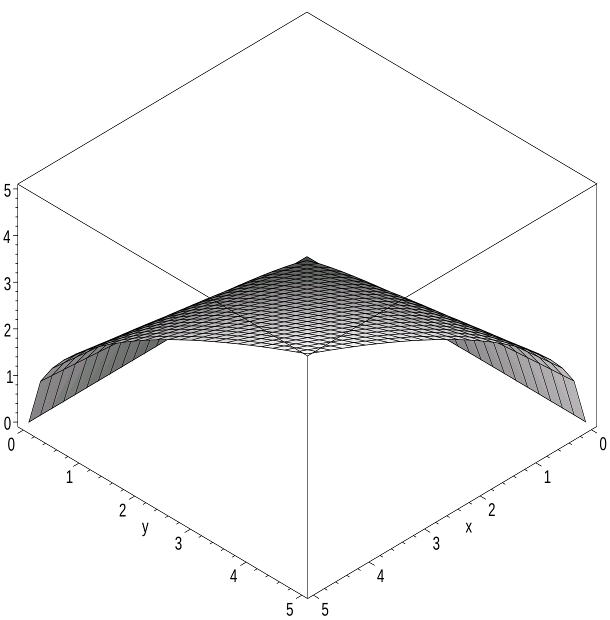
4 Funktionen mehrerer reeller Variablen

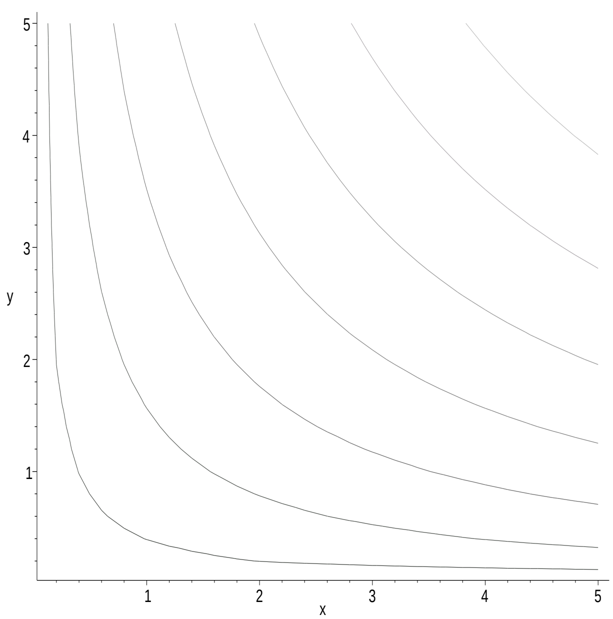
4.1 Darstellung von Funktionen

Analytische und grafische Darstellungsform:

Sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertbereich sind nun *Vektorräume*. Sei beispielsweise $f(x, y) = 2x \cdot y^a$, dann ist die Funktion f eine Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, weil ja sowohl x als auch y aus dem $\mathbb{R}$ stammen, oder verkürzt geschrieben: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Auch der Wertebereich kann ein Vektorraum sein. Sei z.B. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \mathbf{Ax}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A}$ als einer $(m \times n)$-Matrix und somit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, dann ist die Abbildung f offenbar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (sog. lineare Abbildung). Im folgenden beschäftigen wir uns ausschließlich mit Abbildungen vom Typ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Für den Fall $n = 2$, also $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann der Graph dreidimensional dargestellt werden. Sei z.B. $z = f(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$ dann zeigt die linke Abbildung den dreidimensionalen Graphen, die rechte Abbildung zeigt die Funktion in Form von *Höhenlinien*.





Für ein fest vorgegebenes z_0 aus dem Wertebereich von f ist eine Höhenlinie auf dem Nivbeau z_0 definiert als

$$\{(x, y) \in D_f : f(x, y) = z_0\}$$

Implizite Funktionen:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z = f(x, y)$ als explizit formulierter Funktion. Dann ist eine *implizite Funktion* defiert als $f(x, y) = 0$, d.h. man betrachtet alle (x, y)-Kombinationen, bei denen der Funktionswert f gleich Null ist. Man kann dann y als eine (implizit definierte) Funktion $y = g(x)$ auffassen, so dass $f(x, g(x)) = 0$.

4.2 Partielle Ableitungen und totales Differential

Differenzen- und Differentialquotient:

Bei einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $y = f(\mathbf{x})$ kann der Differenzenquotient für die Änderung des k-ten Elements des Vektors aus dem Wertebereich gebildet werden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k}$$

und der Grebzübergang

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k}$$

heißt *partielle Ableitung von f nach x_k an der Stelle* $\mathbf{x}$. Dasselbe kann auch kürzer in Vektorschreibweise formuliert werden. Sei $\mathbf{e}_k$ der k-te Einheitsvektor und $h \in \mathbb{R}$. Dann ist der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_k} = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h}$$

und der Grenzübergang

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h}$$

Alternative Schreibweisen der partiellen Ableitung sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}), \qquad \frac{\partial y}{\partial x_k}(\mathbf{x}), \qquad f_{x_k}(\mathbf{x}), \qquad y_{x_k}(\mathbf{x})$$

Für die Bestimmung der partiellen Ableitung werden die üblichen Differentiationsregeln angewendet. Ähnlich wie im Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann die partielle Ableitung als Steigung der Funktionen in Richtung der x_k-Achse interpretiert werden.

Gradient:

Bildet man sämtliche partiellen Ableitungen der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$, so heißt der Vektor sämtlicher parteiler Ableitungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) = \nabla f(\mathbf{x})$$

Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x}$. Alternative ASchreibweise: $\nabla f(\mathbf{x}) = grad(f)(\mathbf{x})$.

Totales Differential:

Ändert sich der Vektor aus dem Definitionsbereich nicht nur in einem Element, sondern insgesamt, dann ist die Änderung von $y = f(\mathbf{x})$ durch die Änderung sämtlicher $x_1, ..., x_n$, also durch sämtliche partielle Ableitungen zu erklären. Entsprechend ist das *totale Differential* definiert durch:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

<u>Hesse-Matrix:</u>

Im Fall von Abbildungen einer reellen Variablen wurde darauf hingewiesen, dass die 1. Ableitung $f'(x)$ eine Funktion sei, die ggf. wieder nach x abgeleitet werden können (2. Ableitung) usw. Im Fall von Funktionen mehrerer Variablen ist dies ebenfalls möglich, falls die 1. Ableitung differenzierbar ist. Der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} (\mathbf{x})$$

ist die *partielle Ableitung 2. Ordnung* nach x_k an der Stelle $\mathbf{x}$. Im Gegensatz zum vorigen Kapitel kann eine partielle Ableltung nach x_k evtl. auch nach einer anderen Variable, z.B. x_j abgeleitet werden (sog. *gemischte* Ableitung 2. Ordnung):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} (\mathbf{x})$$

Bei einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es folgllich nicht nur n partielle Ableitungen 2. Ordnung, sonden $n \cdot n$ dieser Ableitungen, die sich leicht in Matrixform darstellen lassen. Es heißt

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* von f ander Stelle $\mathbf{x}$. Alternative Schreibweise: $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_f(\mathbf{x})$. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} (\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} (\mathbf{x})$$

d.h. es ist unerheblich, ob zuerst nach x_k und dann nach x_j differenziert wurde oder umgekehrt. Die Hesse-Matrix ist demnach *symmetrisch* (die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sind spiegelbildlich zu den Elementen oberhalb der Hauptdiagonalen).

4.3 Taylorentwicklung

Seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ aus dem Definitionsbereich von f. Dann lautet die Taylorentwicklung 1. Ordnung (analog zum Fall einer reellen Variablen)

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

und die Taylorapproximation 1. Ordnung ist

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \simeq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

Entsprechend lautet die Taylorentwicklung 2. Ordnung

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}'\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{h} + p(\mathbf{h})$$

und die Taylorapproximation 1. Ordnung

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \simeq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}'\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

wobei $r(\mathbf{h})$ und $p(\mathbf{h})$ die entsprechenden "Restterme" sind, die bei der Approximation vernachlässigt werden.

Es sind Taylorentwicklungen bzw. -approximationen höherer Ordnung möglich. Für eine unendlich oft partiell differenzierbare Funktion verschwindet der Restterm mit der Zahl der gegen unendlich gehenden Glieder der Taylorentwicklung.

Beachten Sie: Der Ausdruck für das totale Differential (siehe oben) entspricht einer Taylorapproximation 1. Ordnung. Wird also das totale Differential in ökonomischen Zusammenhängen benutzt, um Aussagen über *absolute* Größenänderungen zu treffen, wird ein (kleiner) Approximationsfehler auftreten.

4.4 Konvexität und Konkavität

Charakterisierung:

Für Funktionen mehrerer reeller Variablen gilt im Prinzip dasselbe wie für den bereits dargestellten Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zunächst ist kurz der Begriff der *konvexen Menge* zu erklären: Eine Menge I ist konvex, wenn für zwei beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt: $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in I$, d.h. die Linearkombination zweier Punkte aus der Menge liegt wiederum in der Menge. Sei nun $I \subseteq D_f$ eine konvexe Menge. Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. *konkav auf* I, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt: $f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{x})$ (und *streng konkav*, wenn die strenge Ungleichung gilt),

2. *konvex auf* I, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt: $f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{x})$ (und *streng konvex*, wenn die strenge Ungleichung gilt).

Ferner gilt: Ist f (streng) konvex, dann ist $-f$ (streng) konkav.

Gradientenungleichung:

Eine andere Charakterisierung der Konkavität bzw. Konvexität verwendet den Gradienten (sog. Gradientenungleichung):

1. Es ist f genau dann auf I konkav, wenn $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \leq \nabla f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$.

2. Es ist f genau dann auf I konvex, wenn $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \geq \nabla f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$.

Charakterisierung über $\nabla^2 f$:

Eine weitere Charakterisierung verwendet die zweiten partiellen Ableitungen, also die Hesse-Matrix: Es ist f genau dann konkav (konvex) auf I, wenn $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ negativ (positiv) semidefinit ist für alle $\mathbf{x} \in I$. Positiv semidefinit bedeutet dabei, dass $\mathbf{x}'\mathbf{H}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in I, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit $\mathbf{H}$ als der Hesse-Matrix (analog negativ semidefinit mit $\leq$). Es ist f streng konkav (konvex) auf I, wenn die Hesse-Matrix negativ (positiv) definit ist, also $\mathbf{x}'\mathbf{H}\mathbf{x} > 0$ (bzw. mit $<$). Zum Begriff der Definitheit von Matrizen siehe den nächsten Abschnitt.

4.5 Extremwerte

In Analogie zum Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die notwendige Bedingung (1. Ordnung) für einen Extremwert

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

d.h. sämtliche partielle Ableitungen müssen an der Stelle $\mathbf{x}^*$ Null sein.

Da diese Bedingung für Maxima wie für Minima zutrifft, ist die hinreichende Bedingung (2. Ordnung):

- *Lokales Maximum*, wenn $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ negativ definit ist, d.h. $\mathbf{x}'\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in D_f, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

- *Lokales Minimum*, wenn $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ positiv definit ist, d.h. $\mathbf{x}'\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in D_f, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Um die positive bzw. negative Definitheit von Matrizen festzustellen, gibt es einige Kriterien, von denen hier lediglich das *Hauptminoren-Kriterium* und auch dieses nur für den Fall $n = 2$ vorgestellt werden soll. Hauptminoren sind die Determinanten von Teilmatrizen einer Matrix $\mathbf{A}$, die wie folgt gebildet werden: Streiche alle Zeilen und Spalten bis auf die erste, die ersten beiden, die ersten drei... usw. Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}_1| = |1|, \quad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Es gilt nun:

- Eine Matrix $\mathbf{H}$ ist *positiv definit*, wenn alle Hauptminoren positiv sind, also $|\mathbf{H}_1| > 0, ..., |H_{n-1}| > 0, |H| > 0$. Im Fall $n = 2$:

$$|\mathbf{H}| = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^*)\right)^2 > 0 \quad \text{und} \quad |\mathbf{H}_1| = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) > 0$$

- Eine Matrix $\mathbf{H}$ ist *negaiv definit*, wenn alle Hauptminoren alternierende Vorzeichen haben: $(-1)^k|\mathbf{H}_k| > 0, k = 1, ...n$. Im Fall $n = 2$:

$$|\mathbf{H}| = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^*)\right)^2 > 0 \quad \text{und} \quad |\mathbf{H}_1| = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) < 0$$

Ist $|\mathbf{H}| < 0$, so liegt kein Extremwert vor. Ist $|\mathbf{H}| = 0$, so kann keine Entscheidung getroffen werden.

Beispiel: Sei $y = f(x_1, x_2) = -x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$. Notwendige Bedingung für ein Extremum ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -x_2 + 2x_1 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 = 0$$

mit der Lösung $x_1^* = 0, x_2^* = 0$. Die Hesse-Matrix ist gegeben durch

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante

$$|\nabla^2 f(x_1^*, x_2^*)| = 3 > 0$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1^*, x_2^*) = 2 > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum.

4.6 Partielle und totale Elastizitäten

Partielle Elastizität:

Für eine Funktion $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ ist eine partielle Elastizität definiert als das Verhältnis einer relativen (margianlen) Änderung von y bei einer relativen (marginalen) Änderung *eines* x_k, also:

$$\epsilon_{y,x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})}{\frac{f(\mathbf{x})}{x_k}} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot \frac{x_k}{f(\mathbf{x})} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot \frac{x_k}{y}$$

Homogene Funktionen:

Es können sich allerdings auch *alle* exogenen Variablen $x_1, ..., x_n$ ändern. Hier unterstellen wir den Fall *homogener Funktionen*, welche wie folgt definiert sind: Eine Funktion f heißt homogen vom Grade r, wenn für alle $\mathbf{x} \in D_f$ und für alle $\lambda \in R$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{x}) = f(\lambda x_1, .., \lambda x_n) = \lambda^r f(\mathbf{x})$$

Wenn also die exogenen Variablen alle um das λ-fache verändert werden, so ändert sich die endogene Variable um das λ^r-fache.

Eulersche Homogeniätsrelation:

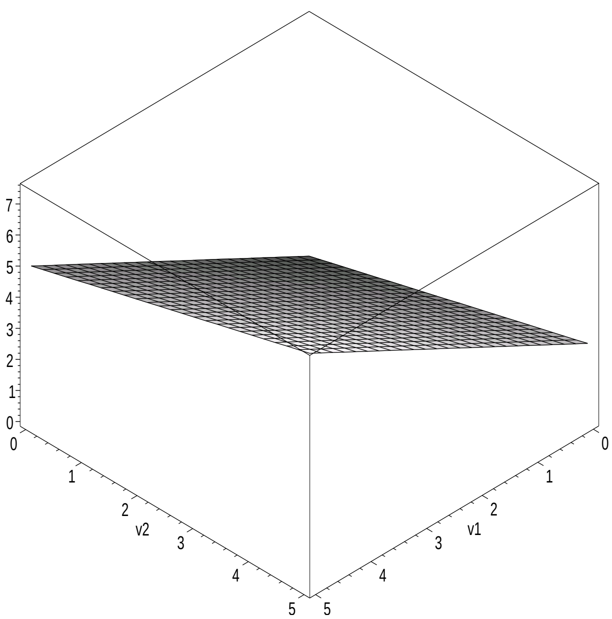
Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei homogen vom Grade r, so gilt für alle $\mathbf{x} \in D_f$ die Beziehung:

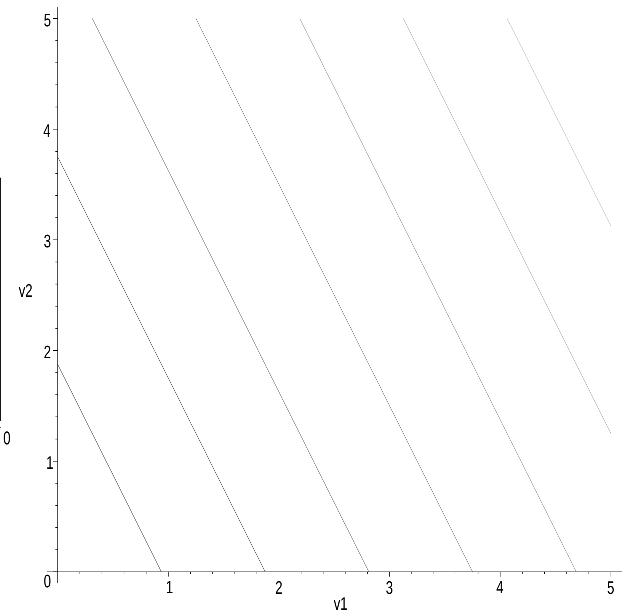
$$\epsilon_{y,x_1}(\mathbf{x}) + \epsilon_{y,x_2}(\mathbf{x}) + ... + \epsilon_{y,x_n}(\mathbf{x})$$

4.7 Ökonomische Beispiele

Indifferenzkurven und Isoquanten:

Gegeben sei die Produktionsfunktion $Y = v_1 + 0.5v_2$. Die Abbildung zeigt die Funktionsdarstellung in Form von Höhenlinien (Isoquanten):





Multiplikatoren und Haavelmo-Fall:

Gegeben sei ein einfaches makroökonomisches Güter- und Geldmarktmarktmodell mit zinsabhängigen Investitionen $I(i)$ und einkommensabhängigem Konsum $C(Y)$ sowie zins- und einkommensabhängiger Geldnachfrage $L(Y, i)$ sowie autonomem (fixem) Geldangebot M. Wie ändert sich das Gleichgewichtseinkommen, wenn sich das Geldangebot verändert? Die Gleichgewichtsbedingungen für Güter- und Geldmarkt sind:

$$Y = C(Y) + I(i)$$
$$M = L(Y, i)$$

Die totalen Differentiale lauten entsprechend

$$
\begin{aligned}
dY &= \frac{dC}{dY}dY + \frac{dI}{di}di \\
dM &= \frac{\partial L}{\partial Y}dY + \frac{\partial L}{\partial i}di
\end{aligned}
$$

(Beachten Sie den Unterschied von d und ∂). Aus dem vorigen Kapitel ist bekannt wie mit Hilfe der Cramerschen Regel der gewünschte Multiplikator abgeleitet werden kann:

$$
\frac{dY}{dM} = \frac{\frac{dI}{di}}{\left(1 - \frac{dC}{dY}\right)\frac{\partial L}{\partial i} + \frac{dI}{di}\frac{\partial L}{\partial Y}}
$$

Betrachten wir nun den Gütermarkt mit *autonomen* Investitionen I^a und zusätzlich autonomen Staatsausgaben G^a. Das Einkommen der Haushalte werde mit einer Steuer belegt. Das für den Konsum *verfügbare* Einkommen ist $Y^v = Y^v(Y, T)$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$
Y = C(Y^v(Y, T)) + I^a + G^a
$$

Es sei angenommen, dass sich die Staatsnachfrage erhöht und diese Staatsausgabenerhöhung durch zusätzliche Steuern finanziert wird: $dG^a = dT$. Die autonomen Investitionen ändern sich nicht ($dI^a = 0$). Das totale Differential ist dann (Kettenregel und totales Differential!)

$$
\begin{aligned}
dY &= \frac{dC}{dY^v}\underbrace{\left(\frac{\partial Y^v}{\partial Y}dY + \frac{\partial Y^v}{\partial T}dT\right)}_{dY^v} + dG^a \\
\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{dC}{dY^a}\frac{\partial Y^v}{\partial Y}\right)dY &= \left(1 + \frac{dC}{dY}\frac{\partial Y^v}{\partial T}\right)dG^a
\end{aligned}
$$

und wegen $\partial Y^v/\partial Y = 1$ und $\partial Y^v/\partial T = -1$

$$
dY = dG^a
$$

Der Staatsausgabenmultiplikator für den Fall $dG^a = dT$ ist also 1.

<u>Gewinnmaximierung im Mehrproduktfall:</u>

Ein Unternehmen stelle die zwei Produkte x_1, x_2 her und biete sie jeweils als Monopolist an. Da die Produktionsprozesse voneinander abhängen, entstehen Gesamtkosten in Höhe von $K(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 0.5x_1x_2$. Die Nachfrage nach den Produkten sei gegeben durch $p_1 = 100 - x_1 + 0.5x_2$ und $p_2 = 80 - x_2 + 0.5x_1$. Die Gewinnfunktion lautet:

$$
\begin{aligned}
G &= p_1x_1 + p_2x_2 - K(x_1, x_2) \\
&= (100 - x_1 + 0.5x_2)x_1 + (80 - x_2 + 0.5x_1)x_2 - 2x_1 - 3x_2 - 0.5x_1x_2
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung für ein Optimum ist

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 98 - 2x_1 + 0.5x_2 = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 77 - 2x_2 + 0.5x_1 = 0$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $x_1^* = 62.533, x_2^* = 54.133$. Hinreichend für ein Maximum:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit} \quad |\mathbf{H}| = 3.75 > 0 \quad \text{und} \quad |\mathbf{H}_1| = -2 < 0$$

Produktionselastizitäten:

Gegeben sei die Produktionsfunktion $Y = F(K, A) = A^{0.6}K^{0.3}$ (A = Arbeit, K = Kapital). Die partiellen Produktionselastizitäten von Kapital und Arbeit lauten:

$$\epsilon_{Y,A} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y} = 0.6A^{-0.4}K^{0.3} \cdot \frac{A}{A^{0.6}K^{0.3}} = 0.6$$
$$\epsilon_{Y,K} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y} = 0.3A^{0.6}K^{-0.7} \cdot \frac{K}{A^{0.6}K^{0.3}} = 0.3$$

und die totale Produktionselastizität ist

$$(\lambda A)^{0.6}(\lambda K)^{0.3} = \lambda^{0.6}A^{0.6}\lambda^{0.3}K^{0.3} = \lambda^{0.9}F(K, A)$$

d.h. F ist homogen vom Grade $0.9 = \epsilon_{Y,A} + \epsilon_{Y,K}$.

5 Statische Optimierung

5.1 Allgemeine Grundlagen

Ökonomisches Prinzip:

Das ökonomische Prinzip, welches annahmegemäß den Individualentscheidungen zugrundeliegt, besagt, dass mit gegebenen Mitteln der Zielerreichungsgrad maximal sein soll, bzw. dass ein gegebenes Zielniveau mit möglichst geringem Mitteleinsatz erreicht werden soll. Im Kern kann man ökonomische Probleme also generell als Optimierungsprobleme ggf. unter Restriktionen bezüglich der Entscheidungsvariablen auffassen.

Optimierungsproblem:

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq D_f$. Dann heißt

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} \qquad \text{mit } \mathbf{x} \in B$$

Optimierungsproblem unter der Nebenbedingung $\mathbf{x} \in B$. Für $B = D_f = \mathbb{R}^n$ heißt das Optimierungsproblem *unrestringiert*, d.h. es gibt keinerlei Beschränkungen für $\mathbf{x}$. Beachte: $f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} = -f(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}}$, d.h. ein Maximum der Funktion f ist immer ein Minimum der Funktion $-f$. Wir werden uns daher im folgenden ausschließlich mit Maximierungsproblemen befassen. Alternative Schreibweisen für die Maximierung:

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in B \qquad \text{oder:} \quad \max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$$

Lokale und globale Lösung:

Ein Vektor $\mathbf{x}^* \in B$ heißt

- *globale Lösung* des Optimierungsproblems, wenn $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in B$,
- *lokale Lösung* des Optimierungsproblems, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so daß $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in B$ mit $\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)'(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)} \leq \epsilon$ (d.h. Funktionswert ist an der Stelle $\mathbf{x}^*$ größer als in einer sog. ϵ-Umgebung von $\mathbf{x}^*$).

Offenbar ist jede globale Lösung auch eine lokale, aber nicht umgekehrt.

Wichtige Resultate:

- (Satz von Weierstraß) Ist die Funktion f stetig und B nichtleer und kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen), dann besitzt das Optimierungsproblem mindestens eine globale Lösung.
- Sei B konvex und f stetig und konkav auf B. Ist $\mathbf{x}^*$ eine lokale Lösung des Optimierungsproblems, dann ist es auch die globale Lösung.

5.2 Maximierung ohne Nebenbedingungen

Allgemeines:

Gegeben ist das unrestringierte Optimierungsproblem $f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}}$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Für unrestringierte Probleme wurden die notwendige und hinreichende Bedingung (bzw. Bedingungen 1. und 2. Ordnung) für ein Maximum bereits dargestellt und werden hier nur kurz wiederholt:

- *Bedingung 1. Ordnung*: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.
- *Bedingung 2. Ordnung*: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ ist negativ definit.

Für ein lokales Mimimum muß entsprechend $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ positiv definit sein. Im Fall, dass $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ indefinit ist und $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, handelt es sich um einen Sattelpunkt. Dies setzt offenbar voraus, dass f mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. In Verbindung mit den allgemeinen Resultaten des vorigen Abschnitts ergibt sich: Ist f konkav (konvex) auf $\mathbb{R}^n$ und $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ein *globales* Maximum (Minimum) von f (die

Bedingung 2. Ordnung ist durch die Konkavität bzw. Konvexität bereits abgedeckt, die ebenfalls über die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ charakterisiert wird).

Beispiel:

Ein allgemeines Beispiel wurde bereits im vorigen Kapitel bei der Extremwertbestimmung gegeben. Im folgenden wird ein Optimierungsproblem aus der Ökonometrie skizziert. Angenommen zwischen den exogenen Variablen $x_1, ..., x_n$ und der endogenen Variablen y bestehe ein linearer Zusammenhang:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n + u = u + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

mit u als Störgröße. Es liegen nun m empirische Beobachtungen von $x_1, ..., x_n, y$ vor, und die Koeffizienten $\beta_1, ..., \beta_n$ sollen nun so geschätzt werden, dass die Abweichungen $u_1, ..., u_m$ der tatsächlichen Daten vom geschätzten Zusammenhang möglichst klein sind, genauer: die *Quadratsumme der Fehler* soll *minimiert* werden. Das Schätzmodell lautet in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$$

wobei $\mathbf{y}$ der $(m \times 1)$-Vektor der beobachteten y-Werte, $\mathbf{X}$ die $(m \times n)$-Matrix der n verschiedenen und jeweils m-fach beobachteten x_i-Werte und $\mathbf{u}$ der $(m \times 1)$-Vektor der Abweichungen (Fehler, Störgrößen) ist. Gesucht ist ein $(n \times 1)$-Vektor der Parameter β_i, bei dem die Quadratsumme der Fehler, also $\mathbf{u'u}$ minimiert wird:

$$\begin{aligned}\min_{\beta} \mathbf{u'u} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= \mathbf{y'y} - 2\mathbf{X'y}\beta + (\mathbf{X}'\beta)'(\mathbf{X}'\beta)\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für ein Optimum ist

$$-2\mathbf{X'Y} + 2\mathbf{X'X}\beta = \mathbf{0}$$

Auflösen nach β ergibt

$$\beta^* = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$$

Da $2\mathbf{X'X}$ stets positiv definit ist, ist die hinreichende Bedingung für ein Minimum erfüllt. Man nennt β^* den *Kleinste-Quadrate-Schätzer* für die Koeffizienten β_i. Dieser Schätzer wird in der empirischen Wirtschaftsforschung sehr häufig verwendet.

5.3 Maximierung mit NB in Gleichungsform

Allgemeines:

In der Regel ist die Wahl möglicher Entscheidungsvariablen begrenzt, d.h. man optimiert unter Nebenbedingungen (NB). Beispiel: Der Haushalt kauft Konsumgüter unter der Nebenbedingung eines begrezten Budgets, das Unternehmen minimiert die Kosten unter der Nebenbedingung eines gegebenen Outputniveaus, es maximiert seinen Gewinn unter der Nebenbedingung gegebener Kapazitäten usw. Häufig lassen sich diese Bedingungen in Gleichungsform schreiben. Die allgemeine Formulierung des Optimierungsproblems lautet

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} \qquad \text{mit } \mathbf{x} \in B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

Die m Restriktionen werden grundsätzlich in der Form $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ mit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m < n$ angegeben bzw. entsprechend umgeformt (alternative Schreibweise: $g_i(\mathbf{x}) = 0$ mit $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$.) Dabei sei auch g stetig differenzierbar. Das Optimierungsproblem hat $n - m$ Freiheitsgrade, d.h. ebenso viele unabhängige Variable. Wäre $m = n$, dann hätte bereits das lineare Gleichungssystem $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ eine eindeutige Lösung und es gäbe nichts mehr zu optimieren.

Lagrange-Ansatz:

Gegeben sei das angegebene Optimierungsproblem mit Restiktionen in Gleicungsform. Eine notwendige Beidngung für ein Optimemum ist, wenn die partiellen Ableitungen der *Lagrangefunktion* $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda' g(\mathbf{x})$ gleich Null sind:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda^{*\prime} \nabla g(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von L nach $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sind die Nebenbedingungen selbst und somit ohnehin gleich Null. Die Lagrange-Funktion hat wegen der *Lagrange-Parameter* $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_m)$ insgesamt $n + m$ Variable und die notwendige Bedigung (zusammen mit den Nebenbedingungen) auch $n + m$ Gleichungen.

Bemerkung zum Beweis:

Der Beweis, weshalb dies die notwendige Bedingung ist, benutzt das Konzapt der *impliziten Funktionen*: Durch das Gleichungssystem $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (also m Gleichungen mit n Unbekannten und $m < n$) werden bei Setzung von m Variablen, die restlichen $n - m$ Variablen *implizit* festgelegt. Sei nun $\mathbf{x}_{(1)}$ der Teilvektor der $n - m$ implizit bestimmten Variablen und $\mathbf{x}_{(2)}$ der Teilvektor der m festgelegten Variablen und somit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})$, dann kann man die Zielfunktion auch als $\bar{f}(g(\mathbf{x}_{(2)}), \mathbf{x}_{(2)})$ schreiben und erhält so ein unrestringiertes Optimierungsproblem. Die notwendige Bedingung $\nabla \bar{f}(\mathbf{x}^*_{(2)}) = \mathbf{0}$ erfordert dann die Kettenregel bei der Differentiation. Zusammen mit dem sog. *Satz über implizite Funktionen*, der hier nicht behandelt werden soll, kann der Lagrange-Ansatz umittelbar abgeleitet werden.

5.4 Maximierung mit NB in Ungleichungsform

Häufig liegen die Restriktionen in Form von Ungleichungen vor, bspw. maximiert der Haushalt seinen Nutzen aus Konsum, indem seine Ausgaben für Konsum streng genommen *höchstens* so hoch wie das Budget ist. Ein Unternehmen maximiert seinen Gewinn durch Setzung von Preisen oder Mengen, die natürlich nicht negativ sein dürfen, also

$p \geq 0$ bzw. $x \geq 0$. Wenn von vornherein nicht klar ist, ob die Restriktionen bindend sind oder nicht, kann der einfache Lagrange-Ansatz nicht verwendet werden.

Konzept der zulässigen Richtung:

Ausgangspunkt sei ein beliebiges $\mathbf{x} \in B$, wobei B aufgrund der Restriktionen eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Vom Punkt $\mathbf{x}$ aus darf man sich nur in diejenigen Richtungen bewegen, in der die Restriktionen noch erfüllt sind. Formal: Ein Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ ist eine zulässige Richtung in $\mathbf{x}$, wenn ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{d} \in B$ für ein $\epsilon \in [0, \alpha]$. Sei $Z(\mathbf{x})$ die Menge aller zulässigen Richtungen in $\mathbf{x}$. Falls keine Restriktion in $\mathbf{x}$ bindend ist, also $\mathbf{x}$ ein sog. *innerer Punkt* von B ist, dann darf man in alle Richtungen gehen ($Z(\mathbf{x}) = \mathbb{R}^n$). Erst wenn für $\mathbf{x}$ mindestens eine Restriktion bindend ist, ist die Menge aller zulässigen Richtungen eingeschränkt.

Nicht alle zulässigen Richtungen erhöhen auch den Funktionswert der Zielfunktion. Ein Vektor $\mathbf{d} \in Z(\mathbf{x})$ ist eine *aufsteigende zulässige Richtung*m wenn $\nabla f(\mathbf{x})\mathbf{d} > 0$ ist. Der Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ gibt ja die Steigung der Funktion in jeweils einer Variablen an, ist also insgesamt der Vektor des steilsten Anstiegs der Zielfunktion.

Falls $\mathbf{x}^*$ ein lokales Maximum von f ist, dann gilt für alle zulässigen Richtungen $\mathbf{d} \in Z(\mathbf{x}^*)$:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \leq 0$$

d.h. es gibt keine zulässigen aufsteigenden Richtungen mehr. Sind im Maximum die Restriktionen *nicht* bindend, dann ist $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ wie im Fall ohne NB und für jeden beliebigen Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ ist die Ungleichung erfüllt.

Spezielfall: Nichtnegativitätsbedingung

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} \qquad \text{mit } \mathbf{x} \in B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Der Definitionsbereich von f ist zwar der gesamte $\mathbb{R}^n$, die Lösung soll aber nicht negativ sein: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Notwendige Bedingung für ein Optimum ist

1. $\nabla f(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$
2. $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = 0$

Bemerkung:

Der erste Teil ergibt sich aus $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \leq 0$ mit $\mathbf{d}$ als den Einheitsvektoren. Der zweite Teil der Bedingung ergibt sich aus em Konzept der zulässigen Richtung. Da der nichtnegative Teil des $\mathbb{R}^n$ konvex ist, ist auch jede Linearkombination zweier Vektoren aus dem zuläissgen Raum wiederum eine zulässige Richtung. Die Lösung $\mathbf{x}^*$ ist immer eine zulässige Richtung, da nichtnegativ. Dies gilt auch für die Linearkombination von $\mathbf{x}^*$ mit dem Nullvektor. Für einen Schritt in Richtung $(\mathbf{0} - \mathbf{x}^*)$ gilt wegen $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \geq 0$ (siehe oben) nun: $\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{0}-\mathbf{x}^*) \geq 0$ und nach elemntaren Umformungen $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* \leq 0$. Weil $\mathbf{x}^*$ aber auch der Lösungsvektor ist, für den gilt: $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* \leq 0$, können beide Ungleichungen nur erfüllt sein, wenn $\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = 0$.

Beispiel:

Sei $f(x_1, x_2) = -x_1^{0.5}x_2^{0.5} \to \max_{x_1,x_2}$ mit $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Es ist im Optimum

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)\right) = \left(-0.5x_1^{-0.5}x_2^{0.5}, -0.5x_1^{0.5}x_2^{-0.5}\right) \leq (0,0)$$

sowie

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* &= -0.5x_1\left(\frac{x_2^{0.5}}{x_1^{0.5}}\right) - 0.5x_2\frac{x_1^{0.5}}{x_2^{0.5}} = 0 \\ \Rightarrow \qquad 2x_1^{0.5}x_2^{0.5} &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0, x_2^* = 0 \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall einer Ungleicungsrestriktion:

Allgemein lautet das Optimierungsproblem:

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}} \qquad \text{mit } \mathbf{x} \in B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$$

d.h. ggf. müssen die Nebenbedingungen in diese Form gebracht werden. Auch die Nichtnegativitätsbedingung kann als spezielle Funktion $g(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ ausgefasst werden. Es ist wiederum $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (bzw. $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$), aber im Unterschied zu Restriktionen in Gleichungsform muss nicht $m < n$ gelten.

Die mathematischen Grundlagen für eine allgemeine Herleitung der Lösung eines Maximierungsproblems mit Ungleichungs-Restriktionen sind relativ kompliziert. Ein entscheidender Punkt ist, dass die Nebenbedingungen bestimmten Voraussetzungen (Regularitätsbedingungen) genügen müssen. Diese sollen sicherstellen, dass im Optimum $\mathbf{x}^*$ alle Schrittrichtungen, die in das Innere von B oder auf den Rand von B zeigen, zulässig sind. Damit soll z.B. ausgeschlossen werden, dass die Erfüllung sämtlicher Nebenbedingungen nur noch vereizelte (singuläre) Punkte zulassen, bei denen jede Schrittrichtung bereits aus B hinausführt.

Slater-Bedingung: Seien $g_1(\mathbf{x}), ..., g_m(\mathbf{x})$ konvex und es existiert ein $\mathbf{x}_0$ mit $g_i(\mathbf{x}_0) < 0, i = 1, ..., m$, d.h. es gibt innere Punkt von B. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann existieren auch im Optimum zulässige Schrittrichtungen etwa in das Innere von B. Alternativ zur Slater-Bedingung genügt es, wenn die Gradienten zumindest der im Optimum *aktiven* Restriktionen voneinander linear unabhängig sind.

Kuhn-Tucker-Theorem:

Sei $\mathbf{x}^*$ die Lösung des Optimeirungsproblems mit Restriktionen in Ungleichungsform. Dann existiert ein nichtnegativer Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{x}^*) - \mathbf{u}\nabla g(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{u} g(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \\
g(\mathbf{x}^*) &\leq \mathbf{0} \quad (=\text{Nebenbedingungen})
\end{aligned}$$

Der Vektor $\mathbf{u}$ kann wieder als Vektor von Lagrange-Parametern aufgefasst werden. Falls $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, also keine der Restriktionen bindend ist, dann muss folglich $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ gelten. Die erste Bedingung kann geometrisch interpretiert werden: Der Gradient der Zielfunktion kann im Optimum als Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen aufgefasst werden.

Beispiel:

Sei $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max_{x_1,x_2}$ unter den NB $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 \leq 0,\ g_2(x_1, x_2) = x_2 - 1 \leq 0$. Die Gradienten sind somit

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = (1, 1), \quad \nabla g_1(\mathbf{x}^*) = (2x_1^*, -1), \quad \nabla g_2(\mathbf{x}^*) = (0, 1)$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen führen zu

$$\begin{aligned}
1 - 2u_1 x_1 - 0 &= 0 \qquad (*) \\
1 + u_1 - u_2 &= 0 \qquad (**)
\end{aligned}$$

sowie aus der zweiten Bedingung

$$u_1(x_1^2 - x_2) + u_2(x_2 - 1) = 0$$

Angenommen $u_1 = 0$, d.h. die erste Restriktion wäe nicht bindend. Dann führt (*) aber mit $1 = 0$ zu einem Widerspruch. Folglich ist die erste Restriktion bindend ($u_1 > 0$)! Wenn aber $u_1 > 0$, dann folgt aus (**) auch $u_2 = 1 + u_1 > 0$, d.h. die zweite Restriktion ist ebenfalls bindend. Aus den NB folgt $x_1^2 \leq x_2 \leq 1$ und somit $|x_1| < x_2$. Die zweite Bedingung kann dann nur erfüllt sein, wenn $g_1(x_1, x_2) = 0$ und $g_2(x_1, x_2) = 0$. Daraus folgt $x_2 = 1$ und $x_1 \in \{-1, 1\}$. Da aber aus (*) folgt: $2u_1x_1 = 1$ und $u_1 > 0$ muss folglich $x_1 = 1$ der Fall sein. Die Lösung lautet folglich $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ und die Lagrange-Faktoren sind $\mathbf{u} = (0.5, 0.5)$.

5.5 Ökonomische Beispiele

Minimalkosten-Kombination:

Der Output werde durch eine Produktionsfunktion $y = f(v_1, v_2) = v_1^{0.7} v_2^{0.3}$ beschrieben. Der gewünschte Output sei $y = 100$. die Faktorpreise seien $q_1 = 1, q_2 = 2$, die Kosten folglich $K(v_1, v_2) = 1v_1 + 2v_2 \to \min_{v_1, v_2}$ unter der Nebenbedingung $100 - f(v_1, v_2) = 0$. Die Lagrangefunktion lautet $L(v_1, v_2, \lambda) = v_1 + 2v_2 + \lambda(100 - v_1^{0.7} v_2^{0.3})$. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v_1} &= 1 - \lambda 0.7 v_1^{-0.3} v_2^{0.3} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial v_2} &= 2 - \lambda 0.3 v_1^{0.7} v_2^{-0.7} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 100 - v_1^{0.7} v_2^{0.3} = 0
\end{aligned}$$

Umstellen der ersten beiden Gleichungen und Teilen der ersten durch die zweite umgestellte Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{0.7}{0.3} \frac{v_1^{-0.3} v_2^{0.3}}{v_1^{0.7} v_2^{-0.7}} = \frac{7}{3} \frac{v_2}{v_1} \\
\Rightarrow \quad v_1 &= \frac{14}{3} v_2
\end{aligned}$$

Einsetzen in die dritte Bedingung ergibt

$$\begin{aligned}
100 - \left(\frac{14 v_2}{3}\right)^{0.7} v_2^{0.3} = 100 - \left(\frac{14}{3}\right)^{0.7} & v_2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & v_2 = 100 \left(\frac{3}{14}\right)^{0.7} \simeq 34.02 \\
\Rightarrow \quad & v_1 \simeq 158.57
\end{aligned}$$

Optimaler Konsumplan:

Ein Haushalt habe die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \log(1 + x_i)$. Die Preise seien $p_1 = 1, p_2 = 1$ und das Budget sei $y = 20$, die Nebenbedingung also $x_1 + x_2 - 20 \leq 0$. Die Slater-Bedingung ist erfüllt, weil es Punkte "im Inneren" des zulässigen Bereiches gibt (nämlich unterhalb der Budgetgeraden). Die Lagrangefunktion lautet $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{2} \log(1 + x_i) - u \cdot (x_1 + x_2 - 20)$. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{1}{x_1 + 1} - u = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_2 + 1} - u = 0 \\
u(x_1 + x_2 - 20) &= 0 \\
u &\geq 0 \\
x_1 + x_2 - 20 &\leq 0
\end{aligned}$$

Angenommen, die Restriktion sei nicht bindend, also $u = 0$. Dann sind die letzten drei (Un-)Gleichungen erfüllt. Aus den ersten Gleichungen folgt dann $1/(x_i + 1) = 0$, also

$x_i = \infty$. Das steht in Widerspruch zur Nebenbedingung. Folglich muss die Restriktion bindend sein, also $u > 0$. Dann ist die dritte Gleichung nur erfüllt, wenn $x_1 = 20 - x_2$, d.h. das Budget y wird voll ausgeschöpft. Aus Umstellen und Division der beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} = 1$$

und Einsetzen von $x_1 = 20 - x_2$ und Auflösen führt zu

$$x_2 = 10 \qquad \text{woraus folgt} \quad x_1 = 10$$

Da beim Haushaltsoptimum bei streng konkaven Nutzenfunktionen von vornherein bekannt ist, dass die Budgetrestriktion bindend sein muss, kann man auch gleich den einfachen Lagrange-Ansatz verwenden. Im vorliegenden Fall kann man die Lösung auch durch "scharfes Hinsehen" ermitteln, denn die Nutzenfunktion ist in x_1, x_2 symmetrisch und die Preise identisch, folglich muss die Lösung symmetrisch sein, was bei Ausschöpfung des Budgets nur $x_1 = x_2 = 10$ sein kann.

6 Differenzen- und Differentialgleichungen

Zeitkonzepte:

Der Begriff der Zeit kann auf zwei verschiedene Arten operationalisiert werden:

- *Diskretes Zeitkonzept* (Differenzengleichungen): Die Zeit wird in einzelne Perioden (z.B. Tage, Wochen, Quartale, Jahre) eingeteilt. Eine ökonomische Größe zum Zeitpunkt t hängt dann von den Realisation dieser Größe in den Vorperioden ab:

  $$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-\Delta t})$$

  mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x}$ als ein Vektor ökonomischer Größen. Dabei ist Δt die Periodendifferenz, also $t - \Delta t$ eine um Δt zurückliegende Periode. Normalerweise wird $\Delta t = 1, 2, ...$ angenommen.

- *Stetiges Zeitkonzept* (Differentialgleichungen): Die Zeit wird nicht in Perioden eingeteilt. Eine Differetialgleichung beschreibt den Zusammenhang der *Änderungsrate* einer ökonomischen Größe mit der ökonomischen Größe selbst:

  $$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = g(\mathbf{x}(t))$$

  mit $g = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Um den Zeitbezug deutlich zu machen, wird t nicht als Zeit*index* angehängt wie bei der Differenzengleichung, sondern die Größen explizit als Funktionen der Zeit geschrieben: $\mathbf{x}(t)$, wobei oft aus Gründen der Notationsvereinfachung das (t) weggelassen wird.

Für beide Zeitkonzepte gibt es Gründe: Ökonomische Entscheidungen werden meist zu bestimmten Zeitpunkten, oft sogar in regelmäßigen Zeitabständen getroffen. Hier bietet sich das diskrete Zeitkonzept an. Treffen viele Wirtschaftssubjekte zu jeweils unterschiedlichen Zeitpunkten Entscheidungen, die nicht einzeln, sondern nur als Aggregat wahrgenommen werden können, bietet es sich an, Änderung des Aggregates in der Zeit als stetig anzunehmen. Andererseits werden viele Aggegrate (z.B. Einkommen) nur zu bestimmten Zeitpunkten periodisch statistisch erhoben.

Wir beschäftigen uns (fast) ausschließlich mit Differenzengleichungen sowie mit dem Spezialfall *einer* ökonomischen Größe, so dass x_t ein Skalar ist, und linearen Funktionen f. Mit ihrer Hilfe lassen sich zeitliche Entwicklungen ökonomischer Größen in einem Modell erklären.

6.1 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Definition:

Eine Differenzengleichung 1. Ordnung ist gegeben, wenn

$$x_t = f(x_{t-1})$$

also $\Delta t = 1$ ist. Die Größe x zum Zeitpunkt t hängt von der Realisation dieser Größe in der *vorhergehenden Periode* ab. Weiter zurückliegende Realisationen spielen explizit keine Rolle. Die Differenzengleichung ist *linear*, wenn sie in der Form

$$x_t = a + bx_{t-1}$$

darstellen lässt. Genauer ist dies eine *inhomogene* Differenzengleichung 1. Ordnung, wenn $a \neq 0$ und sie ist *homogen*, wenn $a = 0$.

Fixpunkt bzw. partikuläre Lösung

Wenn sich der Wert der ökonomischen Variable im Zeitablauf nicht mehr ändert, also $x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = ... = x^*$, dann heißt x^* der *Fixpunkt* oder die *partikuläre Lösung* der Gleichung. Im linearen Fall ist dies

$$x^* = \frac{a}{1-b}$$

Homogener Teil:

Die lineare Differenzengleichung kann umformuliert werden, indem man x_t als *Differenz* zur partikulären Lösung ausdrückt (als Abweichung von x^*): $x_t = x^* + u_t$ bzw. $u_t = x_t - x^*$

ergibt folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
u_t &= x_t - x^* \\
&= a + bx_{t-1} - x^* \\
&= a + b(x^* + u_{t-1}) - x^* \\
&= a + bu_{t-1} - (1-b)x^* = a + bu_{t-1} - a\frac{(1-b)}{(1-b)} \\
&= bu_{t-1}
\end{aligned}$$

d.h. der *inhomogene Teil* der Gleichung fällt weg und man erhält eine Differenzengleichung für die Abweichung von der partikulären Lösung.

Lösung der Gleichung:

Unter einer *Lösung* einer Differenzengleichung versteht man allgemein einen Ausdruck, bei dem man durch Kenntnis des Anfangswertes x_0 (also zum “Startzeitpunkt” $t = 0$) und der Periode t unmittelbar x_t bestimmen kann, also

$$x_t = F(x_0, t) = x^* + G(u_0, t)$$

Der Wert von x_t in $t = 1$ ist durch Einsetzen des Startwertes in die Differenzengleichung, der Wert zum Zeitpunkt $t = 2$ durch Einsetzen des soeben errechneten Wertes für $t = 1$ in die Differenzengleichung zu ermitteln usw. Wir betrachten zunächst nur den homogenen Teil, also die zeitliche Entwicklung der Abweichung u_t. Durch iteratives Einsetzen in den homogenen Teil der Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}
u_1 &= bu_0 \\
u_2 &= bu_1 = b(bu_0) = b^2 u_0 \\
u_3 &= bu_2 = b^3 u_0 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
u_t &= b^t u_0
\end{aligned}$$

Dies wird als *Lösung des homogenen Teils* bezeichnet. Die *gesamte* Lösung lautet demnach

$$x_t = x^* + b^t u_0$$

Beginnt der Prozess mit der partikulären Lösung, d.h. $x_0 = x^*$, so ändert sich der Wert von x_t nicht mehr. Für $u_0 \neq 0$ hängt es von dem Parameter b ab, wie sich die Variable im Zeitablauf entwickelt. Für $b \in (0, 1)$ strebt der Ausdruck b^t für $t \to \infty$ gegen Null, d.h. die anfämgliche Abweichung von der partikulären Lösung verschwindet, für $b > 1$ wird sie dagegen immer größer, d.h. die Zeitreihe divergiert gegen $+\infty$ oder $-\infty$ je nach anfänglicher Abweichung. Es ergeben sich die in folgender Tabelle zusammengefassetn Möglichkeiten (Achtung: Für $b = 0$ liegt gar kein dynamisches System vor!).

$b > 0$	$b < 0$
$b < 1: \quad u_t \to 0$ mit $t \to \infty$	$b < -1: \quad \lvert u_t\rvert \to 0$ mit $t \to \infty$ (alternierendes Vorzeichen)
$b = 1: \quad u_t = u_0 \quad \forall t$	$b = -1: \quad u_t = u_0(-1)^t$ (alterierendes Vorzeichen)
$b > 1: \quad u_t \to \pm\infty$ mit $t \to \infty$	$b < -1: \quad \lvert u_t\rvert \to \infty$ mit $t \to \infty$ (alternierendes Vorzeichen)

Für $|b| < 1$ verschwinden asymptotisch die anfänglichen Abweichungen von x^*. Der Fixpunkt x^* heißt in diesem Fall *asymptotisch stabil.*

6.2 Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Definition:

Eine Differenzengleichung in der Form

$$x_t = c + ax_{t-1} + bx_{t-2}$$

ist eine inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung. Die Ordnungszahl wird also durch die Zahl der maximal in die Vergangenheit zurückliegenden Perioden bestimmt. Dies gilt auch für den Fall, dass $a = 0$ sein sollte, also der Wert der Vorperiode $t-1$ keinen Einfluss hat. Zwar beschränkten wir uns auf den Fall einer skalaren Größe, aber sei hier dennoch angedeutet, wie ein Differenzengleichungs*system* mehrerer Veränderlicher aussehen könnte (im linearen Fall): Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= a_1 x_{1,t-1} + b_1 x_{2,t-2} + c_1 \\ x_{2,t} &= a_2 x_{1,t-1} + b_2 x_{2,t-2} + c_2 \end{aligned}$$

sind ein Beispiel für zwei *gekoppelte* lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung.

Partikuläre Lösung:

Die partikuläre Lösung $x^* = x_t = x_{t-1} = x_{t-2}$ lautet

$$x^* = \frac{c}{(1 - a - b)}$$

Lösung des homogenen Teils:

Durch die Transformation $u_t = x_t - x^*$ ist durch Einsetzen der Differenzengleichung und der partikulären Lösung (analog zum Fall einer Differenzengleichung 1. Ordnung) leicht zu erkennen, dass der homogene Teil als

$$u_t = au_{t-1} + bu_{t-2}$$

formuliert werden kann. Der Lösungsansatz ist hier $u_t = u_0\lambda^t$. Einsetzen des Lösungsansatzes mit den entsprechenden Zeitverschiebungen ergibt

$$u_0\lambda^t = au_0\lambda^{t-1} + bu_0\lambda^{t-2}$$

Teilen durch $u_0 \lambda^{t-2}$ ergibt

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= a\lambda + b \\ \lambda^2 - a\lambda - b &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} &= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \end{aligned}$$

als der bekannten Lösung einer quadratischen Gleichung.

Exkurs: Man kann überprüfen, dass $u_t = u_0 \lambda^t$ tatsächlich ein richtiger Lösungsasnsatz ist, indem man iterativ einsetzt (wie im Fall einer Differenzengleichung 1. Ordnung): Aus $u_2 = u_0 \lambda^2$ und $u_1 = u_0 \lambda$ folgt:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_o \lambda^2 \\ &= u_0 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right) \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right) \\ &= u_0 \left(2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + b \right) \\ &= u_0 \left(a \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right) + b \right) \\ &= u_o (a\lambda + b) \\ &= a u_t + b u_0 \end{aligned}$$

Dasselbe gilt analog für den Fall $\lambda = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$. Es gibt also zwei Lösungen des homogenen Teils, d.h. der zwei Lösungen der quadratischen Gleichung. Ferner sind alle Linearkombinationen beider Lösungen ebenfalls eine Lösung des homogenen Teils.

Reelle und komplexe Wurzeln:

Bei der quadratischen Gleichung $\lambda^2 - a\lambda - b$ kann die Lösung $\lambda_{1,2}$ entweder reell oder (konjugiert) komplex sein.

- **Reelle Wurzel**, falls $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \geq 0$. In diesem Fall können die beiden Lösungen das gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. In jedem Fall entscheided die *betragsmäßig größere* Wurzel über das dynamische Verhalten von x_t. Ist also $\arg\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$, dann verschwindet die anfängliche Abweichung von x^* asymptotisch (evtl. mit alternierendem Vorzeichen von u_t). Im Fall von $\arg\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} > 1$ divergiert x_t gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

- **Komplexe Wurzel**, falls $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b < 0$. Dies ist der ökonomisch oft interessantere Fall, weil x_t dann *zyklische Schwankungen* aufweist. Die Wurzel hat dann die Form $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \; i = \sqrt{-1}$ und kann als Vektor in der Gaussschen Zahlenebene dargestellt werden (vgl. Abschnitt 1.1).

Gedämpfte oder explodierende Schwimngungen:

Ob eine Abweichung von x^* im Zeitablauf immer größer wird oder im Gegenteil verschwindet, hing davon ab, ob die betragsmäßig größte Wurzel größer oder kleiner 1 ist. Aufgrund der Potenzterms b^t bzw. λ^t in der Lösung ist dies im Fall einer reellen Wurzel auch intuitiv einsichtig. Im Fall einer komplexen Wurzel kann ein ähnlich intuitives Kriterium bestimmt werden. Entscheidend ist nun die *Länge* des Vektors in der Gaussschen Zahlenebene, der sogenannte "modulus" der Wurzel: M;t $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ und α, β als den Komponenten des Vektors in der Gaussschen Zahlenebene ergibt sich

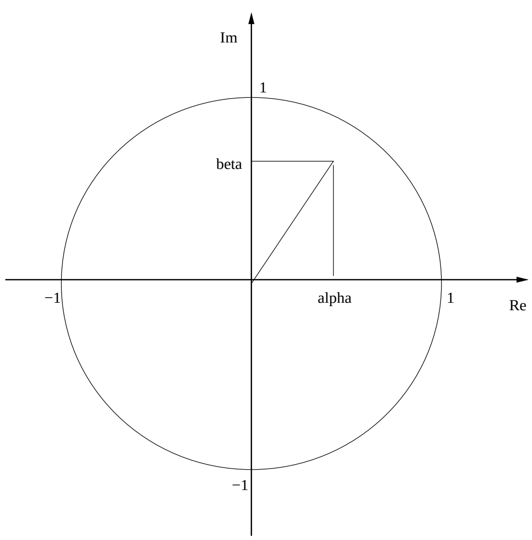
$$\text{mod } \lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

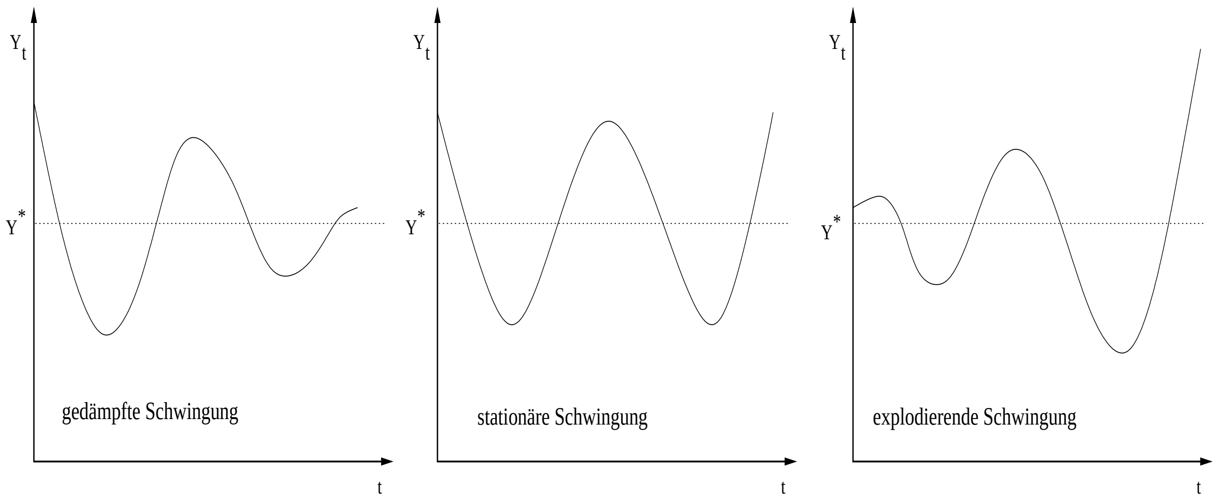
die *Länge* der Wurzel, d.h. des Vektors. Da es sich um konjugiert komplexe Wuezeln handelt, ist die Länge von λ_1 gleich der Länge von λ_2. Für die allgemeine Differenzengleichung 2. Ordnung (siehe oben) wähle man daher sinnvollerweise $\lambda = (a/2) - \sqrt{(a/2)^2 + b}$, so dass

$$\text{mod } \lambda = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = \sqrt{-b}$$

Bei konkreten Zahlkenwerten ist es irrelevant, welche der beiden Wurzeln verwendet wird.

Die Lösung $\lambda_{1,2}$ und deren Länge kann leicht in der Gaussschen Ebene grafisch dargestellt werden (siehe Abbildung). EnTscheidend ist, ob die Länge größer oder kleiner 1 ist, also im sog. *Einheitskreis* liegt. Für den Fall mod $\lambda < 1$ erhält man *gedämpfte Schwingungen*, im Fall mod $\lambda > 1$ *explodierende Schwingungen* und im Fall mod $\lambda = 1$ *stationäre Schwingungen* (vgl. Abbildung).





6.3 Ökonomische Anwendungen

Cobweb-Modell:

Gegeben sei ein Markt mit der linearen Nachfragefunktion $x_t^D = a + bp_t,\ a > 0, b < 0$ und der Angebotsfunktion $x_t^S = cp_{t-1},\ c > 0$, d.h. das Angebot der Unternehmen richtet sich nach dem Preis der Vorperiode, weil sie erwarten, dass der Preis auch in der aktuellen Periode erzielt werden kann. Im Gleichgewicht $x_t^D = x_t^S$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a + bp_t &= cp_{t-1} \\ \Rightarrow \qquad p_t &= -\frac{a}{b} + \frac{c}{b} p_{t-1} \end{aligned}$$

also eine inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung. Die partikuläre Lösung (Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragekurve) ist gegeben durch

$$p^* = \frac{a}{c - b}$$

Durch die Transformation $u_t = p_t - p^*$ und Einsetzen von p^* erhält man als Bewegungsgleichung für die Abweichungen vom Fixpunkt:

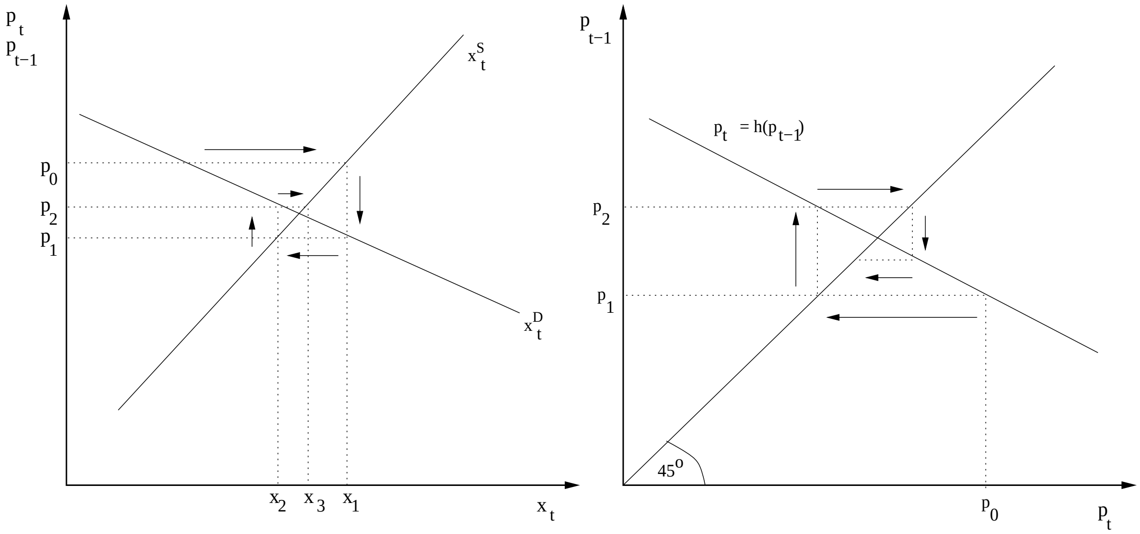
$$u_t = \frac{c}{b} u_{t-1}$$

mit der Lösung $u_t = u_0(c/b)^t$. Die Lösung (partikuläre Lösung plus Lösung des homogenen Teils) ist folglich

$$p_t = p^* + (p_0 - p^*) \left(\frac{c}{b}\right)^t$$

Startet der Prozess nicht im Fixpunkt, so hängt es von den Verhaltensparametern c und b ab, ob das Marktgleichgewicht jemals erreicht wird. Weil $b > 0$ und $c < 0$ haben die Abweichungen von p^* immer alternierende Vorzeichen, d.h. das System "pendelt" um den Fixpunkt. Die Preiszeitreihe konvergiert gegen p^* genau dann, wenn $|(c/b)| < 1$ bzw. $c < |b|$ ist. Für $c > |b|$ entfernt sich p_t immer weiter von p^* und für $c = |b|$ bleibt die anfängliche Abweichung erhalten (mit alternierendem Vorzeichen).

In den Grafiken ist das Modell für den Fall der Konvergenz dargestellt. Im linken Teil ist das Preis-Mengen-Diagramm abgebildet. Das Modell startet beim Preis $p_0 > p^*$. In Periode $t = 1$ erwarten die Unternehmen den Preis der Vorperiode p_0 und bieten x_1 an, so dass der markträumende Preis in $t = 1$ auf $p_1 < p^*$ fällt. Dieser niedrige Preis wird von den Anbietern auch in $t = 2$ erwartet und sie bieten x_2 an, was aber zu einer Preissteigerung auf p_2 führt usw. Im rechten Teil der Abbildung ist derselbe Prozess in einem Diagramm dargestellt, in dem die Differenzengleichung selbst abgebildet ist. Der Schnittpunkt der Funktion mit der Winkelhalbierenden stellt den Fixpunkt dar, denn dort ist $p_t = p_{t-1} = p^*$.



Konjunkturmodell von Hicks:

Konjunkturmodelle sind klassische Anwendungen von Diferenzen- und Differentialgleichungen. Eines der einfachsten Modelle stammt von Hicks (1951). Es wird nur die Nachfrageseite des Gütermarktes betrachtet und angenommen, dass sich das Angebot stets der Nachfrage anpasst (Gleichgewichtsmodell). Die Konsumfunktion lautet

$$C_t = C^a + cY_{t-1}, \qquad 0 < c < 1$$

mit C^a als dem autonomen Konsum und c als der marginalen Konsumneigung. Der Konsum in t hängt vom Einkommen der Vorperiode $t-1$ ab (sog. Robertson-Lag). Die Investitionsfunktion lautet

$$I_t = I^a + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \qquad \beta > 0$$

mit I^a als den autonomen Investitionen und β als sog. Akzelerator. Bemerken die Investoren in den vergangenen zwei Perioden einen Aufschwung, d.h. $Y_{t-1} > Y_{t-2}$, dann werden die Investitionen entsprechend erhöht, im Fall eines Abschwunges werden sie verringert und können sogar negativ werden. Im Gleichgewicht entspricht die Gesamtnachfrage $Y_t^D = C_t + I_t$ dem Angebot Y_t, und man erhält

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ &= C^a + cY_{t-1} + I^a + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ &= C^a + I^a + (c+\beta)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2} \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung mit der partikulären Lösung

$$Y^* = \frac{C^a + I^a}{1 - c}$$

Der homogene Teil (Bewegungsgleichung für die Abweichungen von Y^*) ist demnach

$$u_t = (c + \beta)u_{t-1} - \beta u_{t-2}$$

Einsetzen des Lösungsansazues $u_t = u_0 \lambda^t$ ergibt

$$u_o \lambda^t = (c + \beta)u_0 \lambda^{t-1} - \beta u_0 \lambda^{t-2}$$

und Umformen in die quadratische Gleichung ergibt

$$\lambda^2 - (c + \beta)\lambda + \beta = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{c + \beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c + \beta}{2}\right)^2 - \beta}$$

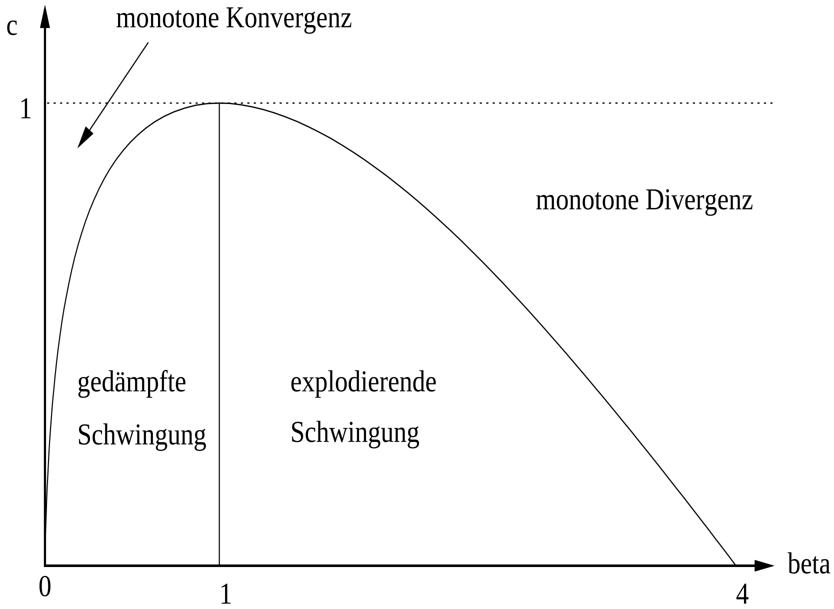
(Konjunktur-) Schwankungen erhält man dann, wenn die Lösung eine komplexe Wurzel ist, also

$$\begin{aligned} \left(\frac{c + \beta}{2}\right)^2 - \beta &< 0 \\ (c + \beta)^2 &< 4\beta \\ c &< \sqrt{4\beta} - \beta = 2\sqrt{\beta} - \beta \end{aligned}$$

Die Schwingungen sind gedämpft, falls $\mod \lambda < 1$, also

$$\begin{aligned} \mod \lambda = \sqrt{\left(\frac{c + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{c + \beta}{2}\right)^2 + \beta} &< 1 \\ \Rightarrow \qquad \beta &< 1 \end{aligned}$$

Alle Parameterkonstellationen, die zu unterschiedlichen dynamische Regimen führen, lassen sich grafisch darstellen (siehe Abbildung).



7 Einführung in die Integralrechnung

7.1 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

Das Integrieren einer Funktion ist die Umkehrung der Differentiation. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Eine Funktion $F : D_f \to \mathbb{R}$ ist eine *Stammfunktion* von f, wenn F differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x)$$

gilt. Die Stammfunktion kann als *unbestimmtes Integral* geschrieben werden:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Nicht jede Funktion f besitzt eine Stammfunktion. Wenn diese existiert, dann ist das unbestimmte Integral bis auf eine additive Konstante C bestimmt (Hinweis: Beim Differenzieren als der Umkehrung der Integration fällt eine Konstante weg!). Unbestimmt ist das Integral deshalb, weil keine Integrationsgrenzen angegeben sind.

Stammfunktion einiger elementarer Funktionen:

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$a^x,\ a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

Beispiele:

$$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a}x^2 + bx + C, \qquad f(x)x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

$$f(x) = \frac{b}{x} + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = b\ln|x| + \frac{2}{3}x^3 + C, \qquad f(x) = 5^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

7.2 Integrationsregeln

Es gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\begin{array}{lcl}
\int af(x)dx & = & a\int f(x)dx \\
\int (f(x)+g(x))dx & = & \int f(x)dx + \int g(x)dx \\
\int f(x)g'(x) & = & f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\
\int f(g(x))g'(x)dx & = & \int f(u)du \text{ mit } u = g(x)
\end{array}$$

7.3 Das bestimmte Integral

Gegeben sei die *stetige* Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Wenn das Intervall $[a,b] \subseteq D_f$ gegeben ist und die Funktion auf diesem Intervall *beschränkt* ist, dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

mit F als einer beliebigen Stammfunktion von f (die Integrationskonstante fällt bei der Differenze ohnehin weg). Ist f auf diesem Intervall $[a,b]$ positiv, dann ist das Integal der *Flächeninhalt* zwischen dem Kurvenverlauf und der x-Achse.

Es gilt ferner:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{sowie} \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Falls die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ nicht beschränkt ist oder das Intervall selbst nicht beschränkt ist, d.h. auch $-\infty$ und $+\infty$ als Integrationsgrenzen vorkommen, dann spricht man von einem *uneigentlichem* Integral. Ein in der Ökonomie wichtiges uneigentliches Integral ist

$$\int_0^\infty x^a dx = \frac{-1}{1+a}$$

Hinweis: Für Abbildungen der Art $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann in jeder Richtung, d.h. über alle $x_1, ..., x_n$ integriert werden. Man erhält dann Mehrfachintegrale. Sei z.B. $z = f(x,y)$, dann ist ein Mehrfachintegral beispielsweise $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$.

Beispiele:

$$\int_0^5 2xdx = 5^2 - 0^2 = 25 \qquad \int_{-5}^{-1} \frac{6}{x}dx = 6\ln|-1| - 6\ln|-5| = 6(\ln 1 - \ln 5) = -9.657$$

$$\int_1^2 x^2 - 2x^3 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^4 - \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^4 = -5.167$$

7.4 Ökonomische Beispiele

Konsumentenrente

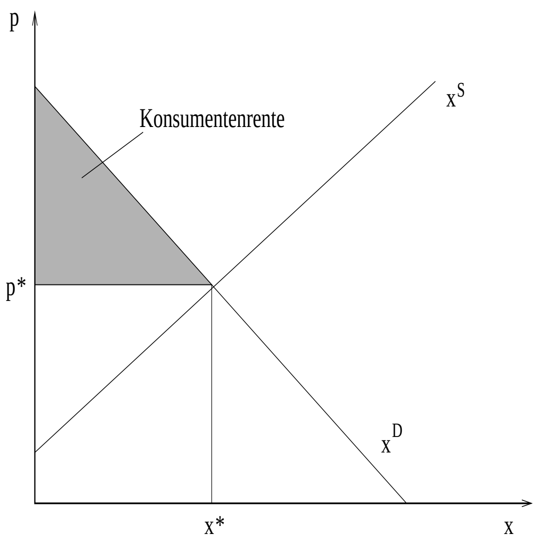
In einem Markt sei die aggregierte Nachfragefunktion gegeben durch $x^D = a - bp$, die aggregierte Angebotsfunktion sei $x^S = c + dp$ mit $a > c > 0, b, d > 0$. Der Gleichgewichtspreis ist entsprechend

$$\begin{aligned} a - bp &= c + dp \\ \Rightarrow \qquad p^* &= \frac{a-c}{d+b} \end{aligned}$$

und die Gleichgewichtsmenge

$$x^* = a - b\frac{(a-c)}{b+d} = \frac{ad+bc}{b+d}$$

Werden zu diesem Gleichgewichtspreis die Transaktionen durchgeführt, haben die Konsumenten, welche eine höhere marginale Zahlungsbereitschaft als p^* hatten, einen Vorteil. Dieser Vorteil drückt sich in dem Abstand der (inversen) Nachfragefunktion, welche die marginale Zahlungsbereitschaft repräsentiert, vom Gleichgewichtspreis p^* aus. Aggregiert man diesen Überschuss an Zahlungsbereitschaft über das Intervall $[0, x^*]$, also die gesamte am Markt getauschte Menge x^*, dann bezeichnet man dies als *Konsumentenrente* (siehe scharfffierter Bereich in der Abbildung).



Formal ist ist die Konsumentenrente das Integral der Differenz von Nachfreagefunktion und Gleichgewichtspreis im Intervall $[0, x^*]$ mit x als der Integationsvariablen. Alternativ kann auch die Nachfragefunktion im Intervall $[p^*, \frac{a}{b}]$ integriert werden ($\frac{a}{b}$ ist der Prohibitivpreis). Um diesen Ausdruck zu formulieren, wird die Nachfragefunktion zunächst als $p(x)$ umgeschrieben, d.h. nach p aufgeflöst: $p(x) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}x$. Die Konsumentenrente ist dann

$$K = \int_0^{x^*} (p(x) - p^*)dx = \int_0^{x^*} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}x - \frac{(a-c)}{d+b} \right) dx$$
$$= \int_0^{x^*} \underbrace{\left(\frac{ad+bc}{b(d+b)} - \frac{x}{b} \right)}_{f(x)} dx$$

Die Stammfunktion von $f(x)$ ist $F(x) = \frac{ad+bc}{b(d+b)}x - \frac{1}{2b}x^2$. Somit ist

$$= F(x^*) - F(0)$$
$$= \frac{ad+bc}{b(d+b)} \frac{ad+bc}{b+d} - \frac{1}{2b} \left(\frac{ad+bc)}{b+d} \right)^2 - 0$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(ad+bc)^2}{b(d+b)^2}$$

Alternativ kann die Konsumentenrente über das Integral zwischen p^* und dem Prohibitivpreis $\bar{p} = a/b$ mit p als Integrationsvariable bestimmt werden:

$$K = \int_{p^*}^{a/b} x(p)dp = \int_{p^*}^{a/b} \underbrace{(a - bp)}_{f(p)} dp$$

und die Stammfunktion von $f(p)$ ist $F(p) = ap - \frac{b}{2}p^2$. Somit

$$= F\left(\frac{a}{b}\right) - F(p^*)$$
$$= \underbrace{\frac{a^2}{b} - \frac{b}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2}_{F(\frac{a}{b})} \underbrace{- \frac{a(a-c)}{d+b} + \frac{b}{2}\left(\frac{(a-c)}{b+d}\right)^2}_{-F(p^*)}$$
$$= a\left(\frac{a}{b} - \frac{(a-c)}{d+b}\right) - \frac{b}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{(a-c)^2}{(d+b)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(ad+bc)^2}{b(d+b)^2}$$

was zu demselben Ergebnis führt. Auf analoge Weise kann man die Produzentenrente als Integral der Angebotsfunktion zwischen dem Achsenabschnitt c und dem Gleichgewichtspreis p^* (mit p als Integrationsvariable) bestimmen.

Intertemporale Nutzenfunktion

Plant ein Individuum über einen gewissen Zeitraum, dann werden üblicherweise zukünftige Erträge und Nutzenwerte gegenüber heuten Erträgen abdiskontiert. Im Rahemne geometrischer Reihen wurde dies bereits am Beispiel der Abzinsung verdeutlicht. Besteht jedoch ein in der Zeit kontinuierlicher Nutzen-, Einkommens- oder Konsumstrom, dann ist auch eine entsprechende stetige Form der Abdiskontierung notwendig. Für ein Zeitintervall $[0, T]$ und eine vom Konsum $c(t)$ abhängige Nutzenfunktion bildet das Integral

$$v = \int_0^T e^{-\delta t} u(c(t)) dt$$

den Gegenwartswertsnutzen des Konsumstroms $c(t)$, wobei $\delta, 0 < \delta < 1$ die Diskontrate ist. Angenommen, der Konsumstrom ist konstant, d.h. $c(t) = c$. Dann kann $u(c)$ als Konstante vor das Integral gezogen werden und es ergibt sich

$$v = u(c) \int \underbrace{e^{-\delta t}}_{f(t)} dt$$

mit der Stammfunktion $F(t) = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t}$ und somit

$$\begin{aligned} &= u(c) \left(F(T) - F(0) \right) \\ &= u(c) \left(-\frac{1}{\delta} e^{-\delta T} + \frac{1}{\delta} \right) = u(c) \frac{1}{\delta} \left(1 - e^{-\delta T} \right) > 0 \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals ist positiv, weil $e^{-\delta T} < 1$ wegen $T > 0$ gewährleistet ist. Häufig wird der Planungshorizont als unendlich angenommen (Hypothese eine unsterblichen "repräsentativen" Individuums). Dann ist der Gegenwartsnutzen des Konsumstroms

$$v = u(c) \int_0^\infty e^{-\delta t} dt$$

Zur Lösung des uneigentlichen Integrals kann man die Bildung des Grenzwertes fpr $T \to \infty$ heranziehen:

$$\lim_{T \to \infty} u(c) \int_0^T e^{-\delta t} dt = \lim_{T \to \infty} u(c) \frac{1}{\delta} \left(1 - e^{-\delta T} \right) = u(c) \frac{1}{\delta}$$

Weitere Anwendungen

Bei allen Prozessen, die in stetiger Zeit anlaufen, treten Integrale auf, etwa bei Bestimmung des *internen Zinssatzes* bei stetigen Rückflüssen oder bei *Abschreibungsvorgängen*. Hängt der Nutzen von einer stigen Zufallsvariablen z ab, so wird der *Erwartungsnutzen* einer Alternative x durch das Integral über die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(z)$ (z.B. Normalverteilung) gebildet:

$$u^e(x) = \int u(x, z) F(z) dz$$

8 Übungsaufgaben

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

1. Lösen Sie folgende Ausdrücke nach x auf:

$$(xy)^n = z^m y^n, \qquad \sqrt[n]{yx^n} = 1, \qquad ae^x = y, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = 1 - \log_a y, \qquad e^{\ln x} = 1$$

$$x = \ln(e^3), \qquad \log_5 x = 3, \qquad 2^x = 64, \qquad x = \log_7 25$$

2. Gegeben sei $ax^2 - bx = -c$. Bei welchen Parameterkonstellationen ist die Lösung $x_{1,2}$ komplex? Wann ist die Lösung eineutig?

3. Berechne folgende Summen:

$$\sum_{n=0}^{5} 2n, \qquad \sum_{n=1}^{4} n^2, \qquad \sum_{i=0}^{5}(ai - 2a + 3)$$

4. Schreiben Sie folgende Summe unter Verwendung des Summenzeichens:

$$2 + 4 + 6 + 8 + ..., \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ...$$

5. Zeigen Sie, dass für $n > 1$ allgemein gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \neq \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)$$

6. Berechnen Sie die Grenzwerte dieser Folgen bzw. Reihen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}, \quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1+n}\right\}, \quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{1+n}\right\},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 0.2^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Gegeben seien zwei Investitionsprojekte. Die erwarteten Rückflüsse sind in folgender Tabelle gegeben.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
Projekt 1	100	200	100
Projekt 2	180	100	100

   a) Berechnen Sie den Barwertder Projekte für einen Zinssatz von $i = 0,1$.

b) Berechenn Sie für beide Projekte denjenigen Zinssatz, der zu einem Barwert in Höhe von 300 führt.

8. Gegeben sei die Konsumfunktion $C_t = 20 + 0.8Y_{t-1}$ und autonome Investitionen in Höhe von $I = 100$. In $t = 0$ herrsche Gleichgewicht auf dem Gütermarkt. In $t = 1$ erhöhen sich die Investitionen dauerhaft um $\Delta I = 10$.

   a) Berechnen Sie für die ersten 4 Perioden das Einkommen und den Konsumzuwachs pro Periode.

   b) Leiten Sie den Multiplikator für n Perioden ab.

   c) Um wieviel erhöht sich das Gleichgewichtseinkommen?

9. Gegeben sei ein System mit Zentralbank und mehreren Geschäftsbanken, die der Mindestreservepflicht unterliegen. Der Mindestreservesatz sei $r = 0.05$. Nehmen Sie eine unendliche Kreditnachfrage an. Gehen Sie davon aus, dass die Kreditnehmer einen konstanten Teil b ihres Kredites als Bargeld halten wollen. Entwickeln Sie die geometrische Reihe des Giralgeldschöpfungsprozesses. Wie lautet der Giralgeldschöpfungsmultiplikator?

10. Ein babylonischer Kaiser wolte den Erfinder des Schachspiels belohnen und stellte ihm einen Wunsch frei. Der Erfinder äußerte folgenden Wunsch: Er wollte mit Reis entlohnt werden nach folgender Regel. Auf das erste der 64 Felder des Schachbrettes lege man 1 Reiskorn. Auf jedes weitere Feld dann jeweils die doppelte Menge des vorherigen Feldes. Stellen Sie unter Verwendung des Summenzeichens die geometrische Reihe auf, und berechnen Sie deren Wert.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2

1. Gegeben seien:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = (4, 1, 0)$$

   Berechenen Sie:

$$4\mathbf{A} + 2\mathbf{B}, \quad \mathbf{AB}, \quad \mathbf{AA}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A}, \quad \mathbf{ABx}, \quad \mathbf{BAx}, \quad \mathbf{yx}, \quad \mathbf{yA}, \quad \mathbf{Ay}^T$$

2. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Berechenen Sie, falls möglich, die Determinanten und Inversen von $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{BD},\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}),\ 2\mathbf{B}, ; \mathbf{D}^T\mathbf{D}$.

3. Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der Matrix.

4. Gegeben sei ein Markt mit drei differenzierten substituierbaren Produkten, die jeweils von einem Unternehmen angeboten werden. Die Angebots- und Nachfragefunktionen seien:

$$\begin{array}{ll} \text{Angebot} & \text{Nachfrage} \\ x_1^A = 10 + 3p_1 & x_1^N = 100 - p_1 + 0.5p_2 + 0.1p_3 \\ x_2^A = 20 + 2p_2 & x_2^N = 80 - 2p_2 + 0.5p_1 + 0.1p_3 \\ x_3^A = 20 + 3p_3 & x_3^N = 80 - p_3 + p_1 + 0.2p_2 \end{array}$$

Gegeben sei ein simulatens Gleichgewicht $x_i^A = x_i^N, 1 = 1, 2, 3$. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung in Matrixform dar und ermitteln Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel den Gleichgewichtspreis für das Gut x_2.

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

$$\text{a)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

6. In einem keynesianischen IS-LM-Modell sei die Konsumfunktion gegeben durch $C(Y) = C^a + cY$, die Investitionefunktion mit $I(i) = I^a - hi$, das reale Geldangebot sei $M = \bar{M}$ und die Geldnachfrage $L(Y, i) = mY - ni$. Berechnen Sie den Einkommens- und Zinsmultiplikator bei einer Änderung der autonomen Investitionen I^a. Verwenden Sie dabei die Cramersche Regel.

7. Die Input-Output-Verflechtungen einer Volkswirtschaft seien gegeben durch

	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Endnachfrage	Gesamtoutput
Sektor 1	800	250	350	w_1	1600
Sektor 2	200	500	175	w_2	1000
Sektor 3	400	250	700	w_3	1400
Faktor A	100	200	0		
Faktor K	100	100	100		

Bestimmen Sie die zu dem gegebenen Gesamtoutput gehörende Endnachfrage. Die Endnachfrage ändere sich zu $w = (90, 150, 120)^T$. Berechnen Sie den dazu gehörenden Faktoreinsatz sowie den Gesamtoutput der Sektoren.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3

1. Wie lauten die Definitions- und Wertebereiche der folgenden Funktionen:
$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sqrt(x), \quad f_4(x) = e^x, \quad f_5(x) = \frac{x}{x+1}$$
2. Bilden sie die etste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:
$$f_1(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3, \quad f_2(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^5, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
$$f_4(x) = \frac{1-x}{2-x}, \quad f_5(x) = x^{1/x}, \quad f_6(x) = h(m(x)) \cdot g(x)$$
$$f_7(x) = 5e^x, \quad f_8(x) = x^2 \ln x, \quad f_9(x) = \frac{\log_a x}{\ln x}$$
3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen (streng) konvex bzw. (streng) konkav auf dem Definitionsbereich sind:
$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^{1/3}, \quad f_3(x) = 10 + 2x, \quad f_4(x) = ax^2 - bx^3,\ a, b > 0$$
4. Bestimmen Sie die Minima bzw. Maxima folgnder Funktionen:
$$g_1(x) = 10x - x^2, \qquad g_2(x) = \frac{x^3}{1-x^2}, \qquad g_3(x) = (x-3)^2 + 5,$$
$$g_4(x) = x^3 - 2x^2 + 5x, \qquad g_5(x) = x$$
5. Bestimmen sie die angegebenen Elastizitäten folgender Funktionen:
$$\begin{array}{ll} \epsilon_{y,x} \text{ und } \epsilon_{y,a} & \text{für } y = \left(\frac{a}{x}\right)^b \\ \epsilon_{y,x} \text{ und } \epsilon_{y,a} & \text{für } y = a - bx \\ \epsilon_{y,x} \text{ und } \epsilon_{y,a} & \text{für } y = ax^b \\ \epsilon_{y,x} \text{ und } \epsilon_{y,a} & \text{für } y = a^x \end{array}$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 4

1. Bestimmen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix:
$$f_1(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + \frac{1}{x_2x_3}, \qquad f_2(\mathbf{x}) = x_1^a x_2^b x_3^c,\ 0 < a, b, c < 1,$$
$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{2x_1}{x_2} + 4x_2x_3, \qquad f_4(\mathbf{x}) = e^{x_1} + 5^{x_2},$$
$$f_5(\mathbf{x}) = \ln 10x_1x_2x_3, \qquad f_6(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$$

2. Bestimmen Sie die Extremwerte (Bedingung 1. *und* 2. Ordnung):

$$z_1 = x^{0.5}y^{0.5} - 0.2xy - 0.2(x+y), \quad z_2 = x^2 + 3y^2 - 2xy, \quad z_3 = (y-x)^2 + x$$

3. Bestimmen Sie für für die Funktionen der vorigen Aufgabe die partiellen Elastizitäten.

Übungsaufgaben zu Kapitel 5

Bitte kommentieren Sie kurz Ihr Vorgehen!

1. Lösen Sie folgende unrestringierte Optimierungsprobleme:

$$\min_{x,y} f_1(x,y) = x^2y + y^2 - xy$$
$$\max_{x,y} f_2(x,y) = -a(10 - x - y) + ax^2 + 2y^2$$

2. Gegeben seien die Preise dreier Güter $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 2$ und die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{0.3}x_2^{0.4}x_3^{0.5}$. Das Budget sei $y = 100$. Berechenen Sie die optimalen Konsummengen mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

3. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - x_3 &\rightarrow \max_{x_1,x_2,x_3} \\ \text{unter den NB} \quad g_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \\ g_2(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1 - 4x_3 = 0 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = -5x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) &\rightarrow \max_{x_1,x_2} \\ \text{mit} \qquad x_1 \geq 0, &\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 6

1. Betrachten Suie folgendes Marktmodell: Die Nachfrage ist gegeben durch $x_t^D = a - bp_t$, das Angebot sei gegeben durch $x_t^S = cp_t^e$ mit p_t^e als der Preiserwartung der Anbieter für Periode t. Als spezielle Form der Preiserwartung seien Erwartungen in der folgenden Form unterstellt: $p_t^e = \delta p_{t-1} + (1-\delta)p_{t-2}$. Entwickeln Sie die dynamische Grundgleichung für p_t und bestimmen sie die partikuläre Lösung.

2. Das Konjunkturmodell von Samuelson verwendet folgende Verhaltensannahmen: Die Konsumfunktion sei $C_t = C^a + cY_{t-1}, 0 < c < 1$, die Investitionsfunktion sei $I_t = I^a + \beta(C_t - C_{t-1})$. Es herrsche stets Gleichgewicht auf dem Gütermarkt: $Y_t = C_t + I_t$. Entwickeln Sie die dynamische Grundgleichung für Y_t.

3. *Achtung: Nichtlineares Modell!* Gegeben sei folgende sog. logistische Gleichung

$$x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1}), \qquad a > 0$$

Bestimmen sie grafisch und analytisch die partikuläre Lösung.

4. Gegeben sei die Differenzengleichung $x_t = \alpha + \beta x_{t-1}$. Bestimmen sie die Lösung (partikuläre Lösung und Lösung des homogenen Teils). Bei welchen Parameterwerten ist die stationäre Lösung stabil, d.h. werden die Abweichungen von der staionären Lösung für $t \to \infty$ Null werden?

Übungsaufgaben zu Kapitel 7

1. Berechnen sie die Stammfunktionen (unbestimmte Integrale) für folgende Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{a}{x} + x, \quad f_2(x) = 5x - \frac{1}{3}x^2, \quad f_3(x) = 2e^{-x}, \quad f_4(x) = 5$$

2. Berechenn sie folgende Integrale:

$$\int_0^2 2xdx, \quad \int_{-1}^1 2^x \ln 2dx, \quad \int_0^{10} 2 - xdx, \quad \int_a^b cxdx$$

3. Gegeben sei die (inverse) Nachfragefunktion $p(x) = \frac{5}{1+x}$ und die Angebotsfunktion $p(x) = 0.5x$. Bestimmen sie die *Produzenten*rente im Marktgleichgewicht.

9 Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 1

1. Lösen Sie folgende Ausdrücke nach x auf:

$$\begin{aligned}
(xy)^n = z^m y^n \quad &\Rightarrow \quad x = z^{\frac{m}{n}} \\
\sqrt[n]{yx^n} = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = y^{-\frac{1}{n}} \\
ae^x = y \quad &\Rightarrow \quad x = \ln\left(\frac{y}{a}\right) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = 1 - \log_a y \quad &\Rightarrow \quad x = a \\
e^{\ln x} = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 1 \\
x = \ln(e^3) \quad &\Rightarrow \quad x = 3 \\
\log_5 x = 3 \quad &\Rightarrow \quad x = 125 \\
2^x = 64 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(64)}{\ln(2)} = 5.99999 \\
x = \log_7 25 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(25)}{\ln(7)} = 1.6542
\end{aligned}$$

2. Die allgemeine Lösung ist

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Die Lösung ist komplex, wenn der Aussdruck unter der Wurzel negativ ist, also

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{4a} < c$$

Die Lösung ist eindeutig, wenn der Wurzelausdruck Null ist.

3. Summen:

$$\sum_{n=0}^{5} 2n = 30$$
$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = 30$$
$$\sum_{i=0}^{5} (ai - 2a + 3) = 3a + 18$$

4. Summen:

$$2 + 4 + 6 + 8 + ..., \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2n$$
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

5. Es gilt für $n > 1$ allgemein: $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \neq \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$.
   Ausführlich geschrieben ist für $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \cdot \sum_{i=1}^{2} y_i = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$
$$\text{und} \quad \sum_{i=1}^{2} (x_i y_i) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

   In der oberen Zeile sind zusätzlich die gemischten Termie $x_i y_j, i \neq j$ enthalten, in der unteren Zeile nicht.

6. Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = e^{\frac{8}{3}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1+n}\right\} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{1+n}\right\} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 0.2^n = 1.25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2a$$

7. Barwert der Rückflüsse bei $i = 0.1$. Der Diskontfaktor, mit dem zukünftige Zahlungen abdiskontiert (abgezinst) werden, ist $1/q = 1/(1+i)$.

$$\begin{aligned} BW_1 &= \frac{100}{q^0} + \frac{200}{q^1} + \frac{100}{q^2} \\ &= 100 + \frac{200}{1.1} + \frac{100}{1.1^2} = 364.46281 \\ BW_2 &= \frac{180}{q^0} + \frac{100}{q^1} + \frac{100}{q^2} \\ &= 180 + \frac{100}{1.1} + \frac{100}{1.1^2} = 353.55372 \end{aligned}$$

Gesucht ist der Zinssatz, bei dem der Barwert der Rückflüsse gleich 300 ist:

$$\begin{aligned} 300 &= \frac{100}{q^0} + \frac{200}{q^1} + \frac{100}{q^2} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 200q^2 - 200q - 100 \quad \text{(überführt in quadr. Form)} \\ \Rightarrow \quad q_{1,2} &= \{1.366, -0.366\} \quad \Rightarrow \quad i = \{0.366, -1.366\}, \quad \text{also } i = 0.366 \\ 300 &= \frac{180}{q^0} + \frac{100}{q^1} + \frac{100}{q^2} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 120q^2 - 100q - 100 \quad \text{(überführt in quadr. Form)} \\ \Rightarrow \quad q_{1,2} &= \{1.420, -0.587\} \quad \Rightarrow \quad i = \{0.420, -1.587\}, \quad \text{also } i = 0.420 \end{aligned}$$

(Die zweite, ökonomisch unplausible negative Lösung kann ausgeschlossen werden.)

8. Das Gleichgewichtseinkommen im Ausgangszustand wird berechnet aus $Y = C(Y) + I = 20 + 0.8Y + 100$. Aufgelöst nach Y ergibt sich $Y^* = 600$. Wenn sich in $t = 1$ die Investitionen auf $I = 110$ dauerhaft erhöhen, ergibt sich folgende Tabelle (beachte: $C_t = 20 + 0.8 \cdot y_{t-1}$):

t	I	C	ΔC	Y	
$t = 0$	100	500	0	600	
$t = 1$	110	500	0	610	(höhere Nachfrage = höheres Angebot)
$t = 2$	110	508	8	618	(höheres Y in $t = 1$ erhöht C in $t = 2$)
$t = 3$	110	514.4	6.4	624.4	(usw.)
$t = 4$	110	519.52	5.12	629.52	(usw.)

Multiplikator für n Perioden:

$$\begin{aligned}
\Delta Y &= \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + ... + c^{n-1}\Delta I \\
c\Delta Y &= c\Delta I + c^2\Delta I + ... + c^n\Delta I \\
\Delta Y - c\Delta Y &= \Delta I - c^n\Delta I = (1-c^n)\Delta I \\
\Delta Y &= \frac{1-c^n}{1-c}\Delta I
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ ist $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ und die Änderung des Gleichgewichtseinkommens ist demnach $\Delta Y^* = 1/(1-c)\Delta I = 1/(1-0.8)\Delta I = 5\Delta I$. In diesem Fall mit $\Delta I = 10$ wächst das Gleichgewichtseinkommen also um $\Delta Y = 50$, wie man auch durch Ausrechenn von $Y = 20 + 0.8Y + 110$ überprüfen kann ($Y^{**} = 650$).

9. Die erste Einlage in Höhe von ΔZ wird nach Abzug der Mindestresrve r als Kredit vergeben, der nach Abzug eines Anteils b wieder auf ein Sichtkonto eingezahlt wird, also $(1-r)(1-b)\Delta Z$. Der Prozess setzt sich fort und führt zu einer geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \Delta Z + (1-r)(1-b)\Delta Z + (1-r)^2(1-b)^2\Delta Z + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-r)^k(1-b)^k\Delta Z = \frac{1}{1-(1-r)(1-b)}\Delta Z = \frac{1}{b+r-br}\Delta Z
\end{aligned}$$

10. Die geometrische Reihe ist

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 1+2+4+8+...+2^{63} = \frac{2^{64}-1}{2-1} \simeq 1.845 \cdot 10^{19}$$

(Falls 100 Reiskörner = 1 Gramm, dann wiegt die Summe der Körner etwa $1.8 \cdot 10^{11}$ Tonnen.)

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 2

1. Gesuchte Ausdrücke:

$$4\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & 4-7 & \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AA} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ay}^T = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ABx} = \begin{pmatrix} -17 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BAx} = \begin{pmatrix} -25 \\ 17 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{yx} = 7, \quad \mathbf{yA} = (3, 12, 2)$$

2. Determinanten und Inversen:

$$det(\mathbf{A}) = -1, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad det(\mathbf{B}) = -1, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(\mathbf{C}) = 242, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{121} & \frac{-1}{242} \\ \frac{1}{121} & \frac{10}{121} \end{pmatrix}, \quad det(\mathbf{BD}) = 0, \quad (\mathbf{BD})^{-1} \text{ existiert nicht}$$

$$det(\mathbf{I}-\mathbf{B}) = 5, m \quad (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-9}{5} & \frac{-6}{5} \end{pmatrix}, \quad det(2\mathbf{B}) = -8,$$

$$(2\mathbf{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad det(\mathbf{D}^T\mathbf{D}) = 0, \quad (\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1} \text{ existiert nicht}$$

3. Rangbestimmung:

$$Rg(A) = 2, \qquad Rg(B) = 2$$

4. Marktgleichgewicht in Matrixschreibweise (Hinweis: Bringen Sie zunächst alle p_i auf eine Seite, die absoluten Beträge auf die andere Seite).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -90 \\ -60 \\ -60 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & -4 & 0.1 \\ 1 & 0.2 & -4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

Es ist $|\mathbf{A}| = -62.46 \neq 0$, d.h.die Inverse und damit eine eindeutige Lösung existiert. Ferner ist $|\mathbf{A}_2| = -1170$, so dass nach Cramerscher Regel $p_2 = 18.732$.

5. Die Lösungsmenge bei a) ist $\mathbf{x} = (2, 0, -1)^T$. Bei b) hat die Matrix $\mathbf{A}$ den Rang drei, es sind jedoch 5 Unbekannte x_i, d.h. das System ist unterbestimmt und hat keine eindeutige (also mehrere) Lösungen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3x_2 - 3x_4 \\ \text{beliebig} \\ -3 + 2x_4 \\ \text{beliebig} \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. Keynesianisches IS-LM-Modell. Die Aufgabe entspricht dem im Skript aufgeführten Beispiel auf S.16 mit $I_i = -h, C_Y = c, L_Y = m, L_i = -n$ Entsprechend der Herleitung nach Cramerscher Regel (s. Skript) ergiben sich die Multiplikatoren:

$$\frac{dY}{dI} = \frac{n}{n(1-c) + mh} > 0, \qquad \frac{di}{dI} = \frac{m}{n(1-c) + mh} > 0$$

7. Input-Output-Analyse: Es sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{800}{1600} & \frac{250}{1000} & \frac{350}{1400} \\ \frac{200}{1600} & \frac{500}{1000} & \frac{175}{1400} \\ \frac{400}{1600} & \frac{250}{1000} & \frac{700}{1400} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{100}{1600} & \frac{200}{1000} & 0 \\ \frac{100}{1600} & \frac{100}{1000} & \frac{100}{1400} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1000 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

Die Endnachfrage ist

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 200 \\ 125 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Bei der vorgegebenen Endnachfrage (s. Aufgabe) ist der Gesamtoutput

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1420 \\ 1020 \\ 1460 \end{pmatrix} \quad \text{und der Faktoreinsatz } \mathbf{m} = \mathbf{Bq} \simeq \begin{pmatrix} 292.75 \\ 295.046 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 3

1. Definitions- und Wertebereiche:

Funktion	D_f	W_f
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
f_2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0^+$
f_3	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^+$
f_4	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
f_5	$\mathbb{R}/\{-1\}$	$\mathbb{R}$

2. Ableitungen

$$\begin{array}{ll}
f_1'(x) = 3 + 4x + 3x^2 & f_1''(x) = 4 + 6x \\
f_2'(x) = -5\frac{a^5}{x^6} & f_2''(x) = 30\frac{a^5}{x^7} \\
f_3'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} & f_3''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \\
f_4'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} & f_4''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \\
f_5'(x) = - - - & - \\
f_6'(x) = h'm'g + g'h & f_6'' = h''(m')^2g + h'm''g + 2h'm'g' + hg'' \\
f_7'(x) = 5e^x & f_7''(x) = 5e^x \\
f_8'(x) = 2x\ln(x) + x & f_8''(x) = 2\ln(x) + 3 \\
f_9'(x) = 0 & f_9''(x) = 0 \text{ (mit } \log_a(x) = \ln(x)/\ln(a) \text{ !)}
\end{array}$$

3. Überprüfung der Konvexität/Konkavität anhand der 2. Ableitung:

$$\begin{array}{ll}
f_1'' = 6x & \text{konkav auf } [-\infty, 0], \text{ konvex auf } [0, \infty] \\
f_1'' = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}} & \text{konkav auf } D_f = \mathbb{R}_0^+ \\
f_1'' = 0 & \text{konvex und konkav (linear)} \\
f_1'' = 2a - 6bx & \text{konvex auf } [\frac{a}{3b}, \infty], \text{ konkav auf } [-\infty, \frac{a}{3b}]
\end{array}$$

4. Extremwertbestimmung:

Lösung(nach Bed. 1. Ordnung	Bedingung 2. Ordnung
$x_1^* = 5$	$f_1''(x_1^*) = -2$ (Maximum)
$x_2^* \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$	$f_2''(x_{2,1}^*) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (Minimum)
	$f_2''(x_{2,2}^*) = 0$ (kein Extremum)
	$f_2''(x_{2,3}^*) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ (Maximum)
$x_3^* = 3$	$f_3''(x_3^*) = 2$ (Minimum)
$x_4^* =$ komplex	–
$x_5^* =$ kein Extremwert bestimmbar	–

5. Elastizitäten

$$\epsilon_{y_1,x} = -b, \quad \epsilon_{y_1,a} = b, \quad \epsilon_{y_2,x} = \frac{bx}{(bx-a)}, \quad \epsilon_{y_2,a} = \frac{a}{(a-bx)}$$

$$\epsilon_{y_3,x} = b, \quad \epsilon_{y_3,a} = 1, \quad \epsilon_{y_4,x} = \ln(a)x, \quad \epsilon_{y_4,a} = x$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 4

1. Gradienten und Hesse-Matrizen:

$$\nabla f_1 = \left(2x_2 - x_3, 2x_1 - \frac{1}{x_2^2 x_3}, -x_1 - \frac{1}{x_2 x_3^2}\right) \qquad \nabla^2 f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & \frac{2}{x_2^3 x_3^3} & \frac{1}{x_2^2 x_3^2} \\ -1 & \frac{1}{x_2^2 x_3^2} & \frac{2}{x_2 x_3^3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } z = x_1^a x_2^b x_3^c. \qquad \nabla f_2 = \left(\frac{az}{x_1}, \frac{bz}{x_2}, \frac{cz}{x_3}\right) \qquad \nabla^2 f_2 = \begin{pmatrix} \frac{az(a-1)}{x_1^2} & \frac{abz}{x_1 x_2} & \frac{acz}{x_1 x_3} \\ \frac{abz}{x_1 x_2} & \frac{bz(b-1)}{x_2^2} & \frac{bcz}{x_2 x_3} \\ \frac{acz}{x_1 x_3} & \frac{bcz}{x_2 x_3} & \frac{cz(c-1)}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3 = \left(\frac{2}{x_2}, 4x_3 - \frac{2x_1}{x_2^2}, 4x_2\right) \qquad \nabla^2 f_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{x_2^2} & 0 \\ \frac{-2}{x_2^2} & \frac{4x_1}{x_2^3} & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4 = (e^{x_1}, 5^{x_2}\ln(5)) \qquad \nabla^2 f_4 = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 5^{x_2}(\ln(5))^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_5 = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right) \qquad \nabla^2 f_5 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_6 = \left(\frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_3}, -\frac{x_1 + x_2}{x_3^2}\right) \qquad \nabla^2 f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{x_3^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{x_3^2} \\ \frac{-1}{x_3^2} & \frac{-1}{x_3^2} & \frac{2(x_1+x_2)}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

2. Extremwerte:

   Für z_1 lauten die notwendigen Beidngungen:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0.5\frac{y^{0.5}}{x^{0.5}} - 0.2y - 0.2 = 0$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = 0.5\frac{x^{0.5}}{y^{0.5}} - 0.2x - 0.2 = 0$$

   Aus der Symmetrie der beiden Gleichungen ist leicht zu ermitteln, dass im Optimum $x = y$ gelten muss. Substituiert man in einer der beiden Gleichungen y durch x ergibt sich

$$0.5 \cdot 1 - 0.2x - 0.2 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad x^* = 1.5 = y^*$$

   Hinreichende Bedingung: Erstellen der Hesse-Matrix:

$$\nabla^2 z_1 = \begin{pmatrix} \frac{-0.25y^{0.5}}{x^{1.5}} & \frac{-0.25}{x^{0.5}y^{0.5}} - 0.2 \\ \frac{-0.25}{x^{0.5}y^{0.5}} - 0.2 & \frac{-0.25x^{0.5}}{y^{1.5}} \end{pmatrix}$$

   und an der Stelle des Extremwertes $x^* = y^* = 1.5$

$$\nabla^2 z_1(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -0.167 & -0.033 \\ -0.033 & -0.166 \end{pmatrix}$$

   Die Determinante dieser Hesse-Matrix ist $det(\nabla^2 z_1(x^*, y^*)) = 0.0267 > 0$ und der erste (und einzige) Hauptminor (die Determinante des linken oberen Elementes) ist $det(-0.167) = -0.167 < 0$, die Hauptminoren haben also wechselnde Vorzeichen und die Determinante der gesamten Hesse-Matrix ist positiv. Damit ist die Hessematrix negativ definit und es handelt sich um ein Maximum!

   Für z_2 sind die notwendigen Bedingungen:

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = 2x - 2y = 0$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = 6y - 2x = 0$$

   und die einzige Lösung ist leicht zu ermitteln:

$$x^* = 0 = y^*$$

   Die Hessematrix ist gegeben durch

$$\nabla z_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $det(\nabla^2 z_2) = 8 > 0$ und auch der erste Hauptminor ist positiv (2), so dass die Matrix positiv definit ist und es sich folglich um ein Minimum handelt.

Für z_3 sind die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial z_3}{\partial x} = 2x - 2y + 1 = 0$$
$$\frac{\partial z_3}{\partial y} = 2y - 2x = 0$$

Aus der zweiten Gleichungen geht hervor $x = y$, was jedoch in der ersten Zeile zu einem Widerspruch führt. M.a.W. es existiert keine Lösung für dieses Gleichungssystem (Hinweis: Schreiben Sie mal das lineare Gleicghungssystem in Matrxischreibweise und erkennen Sie, dass die Matrix nicht den vollen Rang hat, also singulär ist!). Im übrigen hat die Hessematrix

$$\nabla^2 z_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

die Deterinante Null.

3. Die partiellen Elastizitäten sind

$$\epsilon_{z_1,x} = 0.5\frac{(-5\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} + 2\sqrt{x})\sqrt{x}}{-5\sqrt{x}\sqrt{y} + xy + x + y} \qquad \epsilon_{z_1,y} = 0.5\frac{(-5\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} + 2\sqrt{y})\sqrt{y}}{-5\sqrt{y}\sqrt{x} + xy + x + y}$$
$$\epsilon_{z_2,x} = \frac{2(x-y)x}{x^2 + 3y^2 - 2xy} \qquad \epsilon_{z_2,x} = \frac{-2(-3y + x)y}{x^2 + 3y^2 - 2xy}$$
$$\epsilon_{z_3,x} = \frac{(2x - 2y + 1)x}{y^2 - 2xy + x^2 + x} \qquad \epsilon_{z_3,y} = \frac{-2(x-y)y}{y^2 - 2xy + x^2 + x}$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 5

1. Lösen unrestringierter Optimierungsprobleme. **Erste Zielfunktion:**

$$\min_{x,y} f_1(x, y) = x^2y + y^2 - xy$$

Notwendige Beidngung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy - y = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2 + 2y - x = 0$$

Kein lineares Gleichungssystem! Mehrere Lösungen möglich! Aus letzter Gleichung folgt $y = (x - x^2)/2$. Einsetzen in die obere partielle Ableitung ergibt

$$
\begin{aligned}
2x\left(\frac{x-x^2}{2}\right) - \left(\frac{x-x^2}{2}\right) &= 0 \\
x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\
\Rightarrow \qquad \text{1. Lösung: } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y &= 0
\end{aligned}
$$

Teilen durch x und Umformen zu quadratischer Form ergibt:

$$
x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0
$$

mit den Lösungen

$$
x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \{\frac{1}{2}, 1\}
$$

Durch Einsetzen dieser beiden Lösungen für x in eine der beiden notwendigen Bedingungen erhält man die entsprechenden Lösungen für y . Alle Lösungen:

- $x = 0, y = 0$
- $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{8}$
- $x = 1, y = 0$

Welche der Lösungen ist ein Minimum? Die Hesse-Matrix ist

$$
H(f_1(x,y)) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}
$$

mit der Determinante $det(H(f_1(x,y))) = 4y-(2x-1)^2 = 4y-4x^2+4x-1$. Einsetzen der drei verschiedenen Lösungen ergibt

- $det(H(f_1(0,0))) = -1$, d.h. kein Minimum.
- $det(H(f_1(\frac{1}{2},\frac{1}{8}))) = \frac{1}{2} > 0$ und außerdem ist die Determinante des ersten Hauptminors $det(H_1(f_1(\frac{1}{2},\frac{1}{8}))) = \frac{1}{4} > 0$, die Matrix also positiv definit. Die Lösung ist also ein Minimum.
- $det(H(f_1(1,0))) = -1$, d.h. kein Minimum.

Zweite Zielfunktion:

$$
\max_{x,y} f_2(x,y) = -a(10 - x - y) + ax^2 + 2y^2
$$

Notwednige Optimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = a + 2ax = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = a + 4y = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{4}$$

Die Hessematrix ist

$$H(f_2(x,y)) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $det(H(f_2(x,y))) = 8a$ unabhängig von x, y. Für $a > 0$ liegt folglich ein Minimum (aber kein Maximum!) vor, weil sowohl die Determinante von H, als auch der Hauptminor $det(H_1)$ positiv sind. Für $a < 0$ liegt kein Extremwert vor.

2. Bestimmung des Haushaltsoptimums: Zunächst ist die Lagrangefunktion aufzustellen, die maximiert werden soll. Bei den gegebenen Preisen lautet die Nebenbedingung: $100 - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^{0.3} x_2^{0.4} x_3^{0.5} + \lambda(100 - x_1 - x_2 - 2x_3)$$

Notwendige Optimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.3 x_1^{-0.7} x_2^{0.4} x_3^{0.5} - \lambda = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0.4 x_1^{0.3} x_2^{-0.6} x_3^{0.5} - \lambda = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0.5 x_1^{0.3} x_2^{0.4} x_3^{-0.5} - 2\lambda = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \tag{4}$$

Es ist in (1)-(3) λ bzw. 2λ jeweils links und rechts zu addieren! Dann ergibt Teilen von (1) durch (2)

$$\frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = 1 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{4}{3} x_1 \tag{5}$$

Teilen von (1) durch (3) ergibt

$$\frac{3}{5}\frac{x_3}{x_1} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{5}{6} x_1 \tag{6}$$

Einsetzen von (5) und (6) in (4) ergibt aufgelöst

$$x_1 = 25 \qquad \Rightarrow x_2 = 33.333, \quad x_3 = 20.833 \tag{7}$$

wie durch Einsetzen in (5) und (6) leicht zu ermitteln ist. Auf die Prüfung der Bedingung 2. Ordnung wird hier verzichtet, da dies zu aufwändig wäre.

3. Optimierungsproblem mit zwei NB in Gleichungsform. Die Lagrangefunktion ist

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 - x_2 - x_3 + \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 1) + \lambda_2(3x_1 - 4x_3)$$

mit den notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 1 + 2\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= -1 + 4\lambda_1 x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{4x_2} \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= -1 - 4\lambda_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= g_2(x_1, x_2, x_3) = 0
\end{aligned}$$

Einsetzen von λ_1, λ_2 in erste Gleichung ergibt

$$\frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4x_2}\right) x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = -2x_1$$

Einsetzen in NB g_1 ergibt

$$x_1^2 + 8x_1^2 = 1 \qquad \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

Durch Einsetzen der beiden Lösungen für x_1 in die obigen Gleichungen erhält man die entsprechenden Lösungen für x_2, x_3:

$$\begin{aligned}
&\text{1. Lösung} \qquad \mathbf{x}_{(1)} = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\} \\
&\text{2. Lösung} \qquad \mathbf{x}_{(2)} = \{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Zielfunktion ergibt $f(\mathbf{x}_{(1)}) = 3/4$ und $f(\mathbf{x}_{(2)}) = -3/4$. Die Bedingungen 2. Ordnung können hier aber nicht geprüft werden, da die Hesse-Matrix für die Zielfunktion offenbar die Nullmatrix ist und daher das Kriterium der negativen Definitheit nicht anwendbar ist! Da die Zielfunktion eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist (welche im zulässigen Bereich eine Fläche im $\mathbb{R}^2$ (siehe NB g_2) und einen Zylinder (siehe NB g_1) schneiden soll), gibt es keine Sattelpunkte oder obere bzw. untere Wendepunkte. Das Maximum liegt auf der "Schittkante" der Zielfunktion mit den Nebenbedingungen und ist einfach durch den Zielfunktionswert gekennzeichnet. In diesem Fall hat $\mathbf{x}_{(1)}$ den höheren Funktionswert und ist somit das Maximum.

4. Optimierungsproblem mit Nichtnegativitätsbedingungen

$$f(x_1, x_2) = -5x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + {}_2^2) \rightarrow \max_{x_1, x_2} \qquad \text{mit} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Die Optimalitätsbedingungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= -5 - x_1 \leq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2 - x_2 \leq 0 \\ \nabla f(x_1^*, x_2^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -5x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Ohne die Nichtnegativitätsrestriktion wäre die Lösung $x_1 = -5, x_2 = 2$ und die Hessematrix ist

$$H(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $det(H(f)) =<> 0$ und dem Hauptminor $det(H_1(f)) = -1 < 0$, d.h. die Matrix ist negativ definit und es handelt sich um ein Maximum. Für diese Lösung ist aber für x_1 die Nichtnegativitätsbedingung verletzt. Einsetzen von $x_2 = 2$ in die dritte Optimalitätsbedingung ergibt

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_1^2 + 0 = x_1^2 + 5x_1 = 0 \\ \Rightarrow \qquad x_{1,1} = -5 \quad x_{1,2} = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet demnach $x_1 = 0, x_2 = 2$.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 6

1. Marktmodell: Die Angebotsfunktion ist $x_t^S = c(\delta p_{t-1} + (1-\delta)p_{t-2})$. Bei Markträumung gilt:

$$\begin{aligned} x_t^D = a - bp_t = c(\delta p_{t-1} + (1-\delta)p_{t-2}) = x_t^S \\ \Rightarrow \qquad p_t = \frac{a}{b} - \frac{c\delta}{b}p_{t-1} - \frac{c(1-\delta)}{b}p_{t-2} \end{aligned}$$

Dies ist die dynamische Grundgleichung (inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung). Die partikulären Lösung $p^* = p_t = p_{t-1} = p_{t-2}$ ist:

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{a}{b} - \frac{c\delta}{b}p^* - \frac{c(1-\delta)}{b}p^* \\ \left(1 + \frac{c\delta}{b} + \frac{c(1-\delta)}{b}\right)p^* &= \frac{a}{b} \\ \left(\frac{b}{b} + \frac{c}{b}\right)p^* &= \frac{a}{b} \\ p^* &= \frac{a}{b+c} \end{aligned}$$

2. Konjunkturmodell von Samuelson: Einsetzen der Verhaltensgleichungen in die Gleichgewichtsbedingung $Y_t = Y_t^D = C_t + I_t$ ergibt

$$\begin{aligned} Y_t &= C^a + cY_{t-1} + I^a + \beta\left((C^a + cY_{t-1}) - (C^a + cY_{t-2})\right) \\ &= C^a + I^a + cY_{t-1} + \beta\left(cY_{t-1} - cY_{t-2}\right) \\ &= C^a + I^a + c(1+\beta)Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2} \end{aligned}$$

als dynamische Grundgleichung. Die partikuläre Lösung $Y^* = Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$ ist

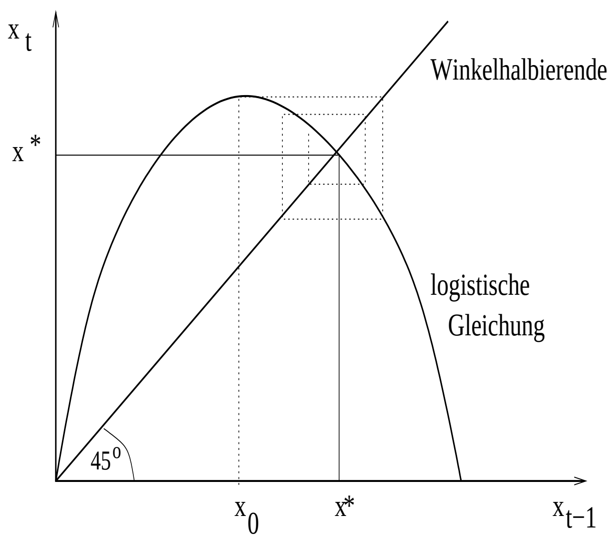
$$\begin{aligned} Y^* &= C^a + I^a + c(1+\beta)Y^* - c\beta Y^* \\ \left(1 - c(1+\beta) + c\beta\right) Y^* = (1-c)Y^* &= C^a + I^a \\ Y^* &= \frac{C^a + I^a}{1-c} \end{aligned}$$

(Je nach den Parameterwerten für c und β kann das Modell Schwingungen erzeugen, vgl. Skript).

3. Logistische Gleichung. Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} x_t &= a x_{t-1}(1 - x_{t-1}) \\ x^* &= a x^*(1 - x^*) = a x^* - a(x^*)^2 \\ a(x^*)^2 + (1-a)x^* = 0 & \\ (x^*)^2 + \frac{1-a}{a}x^* = 0 & \\ \Rightarrow \qquad x^*_{1,2} &= -\left(\frac{1-a}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2a}\right)^2} = \{0, \frac{a-1}{a}\} \end{aligned}$$

In einem 8x_t, x_{t-1})-Diagramm muss die Differenzengleichung die Winkelhalbierende folglich in diesen beiden Punkten schneiden. Für $a > 1$ (hier unterstellt) sieht die Grafik wie folgt aus:



4. Differenzengleichung 1. Ordnung. Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha + \beta x_{t-1} \\ x^* &= \alpha + \beta x^* \\ x^* &= \frac{\alpha}{1-\beta} \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $x_t = x^* + u_t$ lautet die Differenzengleichung

$$x^* + u_t = \alpha + \beta(x^* + u_{t-1})$$

Subtraktion von $x^* = \alpha + \beta x^*$ auf beiden Seiten ergibt

$$u_t = \beta u_{t-1}$$

woraus man durch iteratives Einsetzen auf denLösungsansatz $u_t = u_o \beta^t$ kommt. Die gesamte Lösung lautet entsprechend

$$x_t = x^* + u_0 \beta^t = x^* + (x_0 - x^*)\beta^t$$

Für $|\beta| < 1$ ist die partikuläre Lösung (Fixpunkt) stabil, d.h. die Abweichungen von x^* werden von Periode zu Periode kleiner und verschwinden für $t \to \infty$.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Kapitel 7

1. Stammfunktionen:

$$F_1(x) = a \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad F_2(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$F_3(x) = -2e^{-x} + C, \qquad F_4(x) = 5x + C$$

2. Integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x dx &= 2^2 - 0^2 = 4 && (\text{mit } F(x) = x^2 + C) \\ \int_{-1}^1 2^x \ln(2) dx &= 2^1 - 2^{-1} = \frac{3}{2}, && (\text{mit } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}\ln 2 = 2^x + C) \\ \int_0^{10} 2 - x dx &= 2 \cdot 10 - \frac{1}{2}10^2 - 0 = -30, && (\text{mit } F(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C) \\ \int_a^b cx dx &= \frac{1}{2}c\left(b^2 - a^2\right), && (\text{mit } F(x) = \frac{1}{2}cx^2 + C) \end{aligned}$$

3. Ermitteln der Gleichgewichtsmenge durch Gleichsetzen von Angebots- und Nachfragefunktion:

$$\begin{aligned} \frac{5}{1+x} &= 0.5x \\ \Rightarrow \quad 0.5x^2 + 0.5x - 5 &= 0 \\ x^2 + x - 10 &= 0 \\ \Rightarrow \qquad x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10} \\ \Rightarrow \quad x^* \simeq 2.70 \quad \Rightarrow \quad p^* &= 1.35 \end{aligned}$$

(Die zweite negative Lösung ist ökonomisch irrelevant.). Die Produzentenrente ist das Integral der Differenz von p^* und der Angebotsfunktion im Intervall $[0, x^*]$:

$$\int_0^{2.7} (1.35 - 0.5x)dx = 1.35 \cdot 2.7 - 0.25 \cdot 2.7^2 - 0 = 1.8225$$

(In diesem einfachen Fall hätte man die Fläche auch durch $1.35 \cdot 2.7/2 = 1.8225$ ermitteln können, was aber eine lineare Angebotsfunktion voraussetzt.)