Spieltheorie

PD Dr. M. Pasche

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fehlerreport bitte an: markus@pasche.name

Üersicht:

1. Einführung: Spieltheorie als Theorie sozialer Interaktion
2. Methodische Grundlagen
3. Das Nash-Gleichgewicht als Lösungskonzept
4. Statische Spiele: Ökonomische Anwendungen
5. Dynamische Spiele in extensiver Form
6. Dynamische Spiele: Ökonomische Anwendungen
7. Wiederholte Spiele
8. Wiederholte Spiele: Ökonomische Anwendungen
9. Spiele mit unvollständiger Information
10. Unvollständige Information: Ökonomische Anwendungen
11. Theorie der Verhandlungen
12. Classroom Games – Spiele im Hörsaal
13. Grundzüge der Evolutionären Spieltheorie

Literatur:

- Berninghaus, S.K., Ehrhart, K.-M., Güth, W. (2002), *Strategische Spiele*. Berlin: Springer.
- Binmore, K. (1992), Fun and Games. D.C. Heath.
- Gibbons, R. (1992), *A Primer in Game Theory*. New York: Harvester Wheatsheaf.
- Holler, M.J., Illing, G. (2000), *Einführung in die Spieltheorie*, 4. Auflage. Berlin: Springer.

Spezielle Literaturangaben werden im jeweiligen Kontext bekannt gegeben.

Detaillierter Foliensatz (Skript)!

1. Einführung

„Die Spieltheorie ist eine mathematische Theorie von Konflikt und Kooperation.“ (Reinhard Selten, 1994)

(Foto: R. Selten)

- Modellierung strategischer Interaktion zwischen (rationalen) Akteuren
- Breites methodsches Konzept, anwerndbar auf unterschiedliche Fragestellungen aus unterschiedlichen Disziplinen (Mikroökonomik, Makroökonomik, Betriebswirtschaftslehre, Politikwissenschaft, Biologie,...)

Spieltheorie als ökonomische Theorie sozialer Interaktion:

- Der Zustand, der von Akteur i bewertet wird, hängt nicht nur von *dessen* Entscheidung ab, sondern auch von den Entscheidungen *anderer* Akteure.
- Bei seiner Entscheidung muss sich Akteur i Gedanken über das Verhalten der anderen Akteure machen, da seine (optimale) Entscheidung davon abhängt.
- Jeder Akteur muss dabei berücksichtigen, dass sich auch die anderen Akteure Gedanken über ihn machen, d.h. Erwartungen über sein Verhalten bilden.

  $\Rightarrow$ strategische Interdependenz!

Abgrenzung zur klassischen Entscheidungstheorie:

- In der *Entscheidungstheorie* hängt der Nutzen von der eigenen Entscheidungsvariablen x_i sowie von exogenen Größen z ab:

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, z) \qquad \Rightarrow \{x_i^*\} \text{ (Lösungsmenge)}$$

  (ggf. erweitert um einen Erwartungsoperator, falls z stochastisch ist).

  $\Rightarrow$ „Spiel gegen die Natur“

- In der *Spieltheorie* hängt der Nutzen auch von dem (erwarteten) Verhalten der anderen Spieler ab:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}, z) \qquad \Rightarrow s_i^* \in f(s_{-i})$$

  Wie soll sich Spieler i verhalten? Lösung?

- Spieltheorie in gewissem Sinn das allgemeinere Konzept

Strategische Wechselbeziehungen ziehen sich durch alle Lebensbereiche!

Beispiele:

- Shell kündigt eine Benzinpreiserhöhung an; kurz darauf kündigt auch Aral dieselbe Erhöhung an, womit Shell allerdings schon gerechnet hat.
- Unternehmen A erwartet, dass Unternehmen B in den Markt eintritt, in dem A eine Monopolstellung hat. Nun meldet A ein Patent an, das den Markteintritt für B prohibitiv teuer macht. B tritt nicht in den Markt ein.
- Die Autofahrer auf der A4 werden im Radio vor einem Stau gewarnt; eine Umleitungsempfehlung wird gegeben. Die Autofahrer erwarten, dass alle dieser Empfehlung folgen und bleiben daher auf der A4. Da diese Überlegung aber viele angestellt haben, kommt es trotz der Warnung zum Stau.

Beispiele: (Forts.)

- An einer auf „grün“ springenden Fußgängerampel bewegen sich zwei Fußgängergruppen aufeinander zu. Wer weicht aus? Und wohin?
- In einer Firma soll ein größeres Team eine Präsentation vorbereiten, die für das ganze Team zu positiven oder negativen Konsequenzen führen kann. Die Arbeit ist außerordentlich anstrengend. Ein Teammitglied überlegt sich, dass sein Beitrag zum Gesamterfolg ohnehin nur marginal ist und reduziert seine Arbeitsanstrengung.
- Der Erfolg der Politik der Zentralbank hängt stark von ihrer Glaubwürdigkeit ab, mit der sie das Inflationsziel verfolgt. In einer konjunkturellen Flaute hätte die Zentralbank die Möglichkeit, durch expansive Maßnahmen gegenzusteuern. Sie tut dies aber nicht, weil sie antizipiert, dass das Publikum in Zukunft weniger Vertrauen in die Stabilitäsorientierung der Zentralbank hat.

Beispiele (Forts.)

- Zwei Länder würden von einem Abbau der Handelsschranken profitieren. Dennoch kommt es nicht zu einer solchen Liberalisierung, weil jedes Land noch stärker profitieren würde, wenn jeweils nur das andere Land einseitig die Beschränkungen abbaut.
- Auf einer langen Autofahrt lärmen und streiten sich zwei Kinder auf dem Rücksitz. Der Vater dreht sich um und „droht“, die Kinder an der nächsten Raststätte auszusetzen, wenn sie jetzt nicht ruhig wären. Nach einem kurzen Schockmoment lärmen die Kinder weiter, weil sie antuzipieren, dass die „Drohung“ unglaubwürdig war.
- Der BWL-Absolvent wird in seinem ersten Vorstellungsgespräch über seine Gehaltsvorstellung befragt. Nennt er einen zu hohen Betrag, wird er den Job nicht bekommen, nennt er einen zu niedrigen Betrag, wird dies als Signal für die geringe Selbsteinschätzung seiner Leistungsfähigkeit betrachtet. Der Absolvent muss versuchen, die Zahlungsbereitschaft des Arbeitgebers für leistungsfähige Kandidaten korrekt einzuschätzen.

Beispiele (Forts.)

- Das Kind hilft freiwillig beim Abwaschen, weil es sich davon eine wohlwollendere Reaktion der Eltern verspricht, wenn es anschließend seine 5 in der Mathe-Arbeit vorzeigt.
- Der Online-Versandhandel liefert dem Kunden eine per Vorauskasse bezahlte Ware nicht aus, weil er antizipiert, dass dieser wegen der hohen Transaktionskosten nicht gegen ihn klagen wird.
- Aufgrund der Gefahr, dass Fernsehzuschauer bei einer Werbepause auf einen anderen Sender umschalten, kommt es zu einer gewissen Synchronisation der Werbepausen unterschiedlicher Sender.
- Gewerkschaften und Arbeitgeberverbände verhandeln über den Lohn.

1. Einführung

Zur Geschichte der Spieltheorie:

- John von Neumann (1928), „*Theorie der Gesellschaftsspiele*“
- John von Neumann / Oskar Morgenstern (1944), „*The Theory of Games and Economic Behavior*“
- John Nash (1950), „*The Bargaining Problem*“
- John Nash (1951), „*Non-Cooperative Games*“
- zunehmende Mathematisierung der Ökonomik
- Schnittstelle Entscheidungstheorie, Ökonomik, Politik- und Sozialwissenschaften
- Erste Anwendungen: Militär (nukleare Abschreckung, Rüstungswettlauf, Rüstungskontrollverhandlungen), ökonomische Anwendungen wie Lohnverhandlungen und Oligopoltheorie
- Entwicklung zu einem breiten Forschungsparadigma

Nobelpreis 1994 an John C. Harsanyi, John F. Nash, Reinhard Selten

> *„for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games.“*

Foto: Harsanyi Foto: Nash Foto: Selten

Nobelpreis 2005 an Robert J. Aumann und Thomas C. Schelling

„for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis.“

Foto: Aumann

Foto: Schelling

1. Einführung

Ein einführendes Bei-Spiel zur Arbeitsweise der Spieltheotrie:

In einem Markt befinden sich zwei Unternehmen A und B. Die Nachfrage steigt und beide Unternehmen überlegen sich, ihre Produktionskapazität zu erweitern. Wenn jedoch beide investieren, drohen Überkapazitäten, die den Gewinn wieder reduzieren. Angenommen, die Nachfrage- und Kostenstruktur führt zu folgenden Gewinnen:

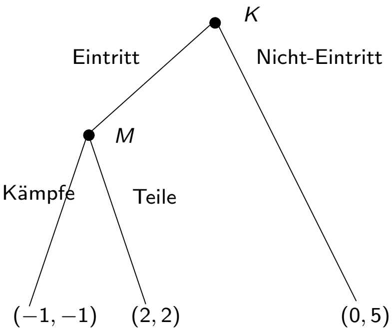
		A	
		investiere	investiere nicht
B	investiere	(8,8)	(12,9)
	investiere nicht	(9,20)	(9,9)

1. Einführung

- Der linke Tabelleneintrag $(x, \cdot)$ ist der Gewinn des Zeilenspielers B, der rechte Tabelleneintrag $(\cdot, x)$ der des Spaltenspielers A.
- Für B ist es besser zu „investieren“, falls A „nicht investiert“, und „nicht investieren“, falls A „investiert“. Die Entscheidung von B hängt folglich davon ab, was er bezüglich der Entscheidung A erwartet.
- Für A gilt umgekehrt dasselbe!
- Weder eine Situation, in der beide investieren, noch die Situation, in der beide nicht investieren, ist „stabil“.
- Da Unternehmen A wesentlich stärker von seiner Investition profitiert als Unternehmen B, könnte B vermuten, dass A eher bereit ist, das Investitionsrisiko einzugehen: (A investiert, B investiert nicht) ist eine (von zwei) *Nash-Lösungen* in diesem Spiel.

Ein anderes Bei-Spiel:

Im Markt befindet sich ein Monopolist. Ein potenzieller Konkurrent will in den Markt eintreten. Der Monopolist könnte dies hinnehmen, was zu einem geringeren Gewinn führt. Jedoch droht er dem potenziellen Konkurrenten mit einem Preiskampf, der ihm empfindliche Verluste bereiten wird. Was wird der Konkurrent tun?



- Falls der Konkurrent der Drohung des Monopolisten glaubt, wird er lieber nicht in den Markt eindringen.
- Ist die Drohung glaubwürdig? Nein! Der Monopolist würde sich damit selbst schaden.
- Dies antizipiert der Konkurrent und tritt in den Markt ein. Der Monopolist gibt sich mit der Marktaufteilung zufrieden.

Was ist in den „Spielregeln“ definiert?

- Spieler
- Strategieräume (Wahlalternativen, Entscheidungsoptionen,..)
- Auszahlungsfunktionen, die von der Strategiewahl aller Spieler abhängen („payoff“)
- Rationalität der Spieler (ggf. andere Hypothesen)
- Informationsstand der Spieler

Wichtige Kategorisierungen von Spieltypen:

- Statische und dynamische Spiele
  (Achtung: Nicht die physische Zeit ist entscheidend!)
- Wichtige Unterklasse dynamischer Spiele: wiederholte Spiele
- Spiele mit vollständiger und unvollständiger Information
- Spiele mit perfekter und imperfekter Information

Kooperative und nicht-kooperative Spieltheorie:

- Möglichkeit der Spieler, *bindende Verträge* abzuschließen.
- Wenn die Spieler keine bindenden Verträge abschließen können, dann muss eine Lösung ein selbst-stabilisierendes Gleichgewicht sein.
- Wenn es die Möglichkeit bindender Verträge gibt, dann besteht das Problem „nur“ noch darin, einen Strategievektor mit wünschenswerten Eigenschaften zu ermitteln (Wahl eines paretoeffizienten Auszahlungsvektors, Ressourcenaufteilung). Die Durchsetzung der gefundenen Lösung wird durch externe Institutionen sichergestellt (externe Stabilität).
- Die Möglichkeit, bindende Verträge einzugehen, kann als Wahloption in den Strategiemengen der Spieler berücksichtigt werden. Das Gesamtspiel ist dann nicht-kooperativ. Das Eingehen bindender Verträge wird dann nicht mehr vorausgesetzt, sondern endogenes Spielresultat.
- Der Begriff „nicht-kooperative Spieltheorie“ ist missverständlich! Besser: „explizierende Spieltheorie“.

Lösung eines Spiels: Empfehlung einer bestimmten Strategiewahl für jeden Spieler in einem konkreten Spiel. Dieser Strategievektor soll bestimmte Eigenschaften aufweisen.

Lösungskonzept (auch: Gleichgewichtskonzept): allgemeines Prinzip, wie eine Lösung in einer Klasse von Spielen zu ermitteln ist, z.B.:

- Die Erwartungen sollen konsistent sein, d.h. die Entscheidungen dürfen nicht auf einem systematischen Erwartungsfehler beruhen.
- Kein Spieler darf einen Anreiz haben, von dem Strategievorschlag abzuweichen.

$\Rightarrow$ „selbst-stabilisierendes Verhalten“

Einige Fragen, die auf Missverständnissen beruhen:

- Müssen sich Spieler an die Spielregeln halten?
- Können sich die Spieler nicht einfach dem Spiel verweigern?
- Wieso geht es immer nur um „Auszahlungen“? Gibt es nicht auch andere Wertmaßstäbe?

Normative und positive Spieltheorie:

- **Normativ:** Unabhängig von Empirie; Entwicklung von allgemeinen Begriffen, Methoden und Konzepten zur Analyse der logischen Grundlagen einer Theorie des strategischen rationalen Entscheidungsverhaltens. Wie sollten sich rationale Spieler (optimal) verhalten? Unterscheidung normativ – präskriptiv
- **Positiv:** Versuch der Beschreibung und Erklärung tatsächlich beobachtbaren strategischen Verhaltens in unterschiedlichen Anwendungsgebieten.
- Interessant sind Spiele, in denen experimentell oder empirisch nachgewiesene Verhaltensmuster mit den Voraussagen der Spieltheorie nicht übereinstimmen

  $\Rightarrow$ Experimentelle Spieltheorie, Behavioral Game Theory

2. Spiele in Normalform: Methodische Grundlagen

Gliederung:

- **Spieler** $i = 1, ..., n$
- **Strategiemengen** S_i
  - *diskret:* z.B. $\{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}\}$ oder {Markteintritt, kein Markteintritt}
  - *stetig:* z.B. $\mathbb{R}_0^+$ oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf diskreten Alternativenräumen
  - *zusammengesetzt:* aus stetigen und diskreten Elementen

  Die Strategiemengen enthalten *alle* denkbaren Entscheidungsmöglichkeiten. Die Strategiemengen können für jeden Spieler anders definiert sein.
- **Strategien** $s_i \in S_i$: Ein Element der Strategiemenge beschreibt einen vollständigen Verhaltensplan für das gesamte Spiel.

Notation:

$$S = S_1 \times S_2 \times ...S_n = \times_{j=1}^{n} S_j$$
$$s = (s_1, ..., s_n) \in S \quad \text{(Strategievektor)}$$

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ...S_{i-1} \times S_{i+1} \times ...S_n = \times_{j=1, j \neq i}^{n} S_j$$
$$s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ...s_n) \in S_{-i}$$

Strategievekktor der anderen Spieler (außer i)

... sieht erstmal kompliziert aus, vereinfacht aber später die Schreibarbeit!

Entwicklung des Begriffs des Rationalverhaltens in der Ökonomik:

- Adam Smith (1723-1790):
  - Orientierung der Akteure am *Eigeninteresse*; Akteure sind zwar auch an moralische Normen gebunden, handeln aber primär aus egoistischen Motiven.
  - Koordination egoistisch motivierter Aktivitäten durch Märkte führt zu kollektiv vernünftigen Resultaten
  - keine Formalisierung des Entscheidungsverhaltens
- Alfred Marshall (1842-1924) (u.a.):
  - Etablierung des Begriffs des (Grenz-) Nutzens (Vorläufer: Hermann Heinrich Gossen, 1819-1858)
  - keine Fixierung auf „egoistisches Eigeninteresse“
  - Beschreibung des Verhaltens durch das *Marginalkalkül*: „Marginalistische Revolution“ (Menger, Jevons, Walras, Marshall); Verwendung von Methoden der klassischen Mechanik und Optimierungstheorie.

- Erwartungsnutzentheorie:
  - von Neumann/Morgenstern (1947)
  - Verschiedene *Axiomatisierungen* von Präferenzordnungen $\Rightarrow$ Begründung von Nutzenfunktionen unter Sicherheit und Unsicherheit
  - Rationalverhalten: Konsistentes Verhalten gemäß der Präferenzordnung (rational choice, rational man paradigm)
  - Maximierungsprinzip, Theorie der offenbarten Präferenzen
- Beschränkte Rationalität:
  - Herbert A. Simon (1950er Jahre)
  - Sehr breite theoretische und empirische Literatur
  - Zwar zunehmende Bedeutung, aber kein „Paradigmenwechsel"

(Simon, H.A. (1997), *An Empirically Based Microeconomics*. Cambridge: Cambridge University Press [First Lecture]).

Rationalität und Nutzentheorie:

- **Handlungen** (hier: Strategien), **Umweltzustände** (hier: Strategien der anderen Spieler)
- **Handlungsergebnisse:** Die eigene Handlung s_i führt in Abhängigkeit von den Handlungen der anderen Spieler s_{-i} zu Ergebnissen $X, Y, Z, ... \in M$, die aus Sicht der Spieler subjektiv bewertet werden.

  Schreibweisen:

  Intuition: $X = X(s_i, s_{-i})$

  Konvention: Handlungen als Funktionen: $s_i : S_{-i} \rightarrow M$, d.h. ein Ergebnis X ist der Funkltionswert einer Handlung $X = s_i(s_{-i})$.

- **Präferenzen:** lat. prä-ferre = vor-ziehen.

  Zunächst erscheint es plausibel, dass ein Akteur unterschiedliche *Ergebnisse* einer Handlung bewertet. Beobachtbar sind lediglich *Wahlhandlungen*. Nach der „Theorie offenbarter Präferenzen“ lässt die Wahlhandlung einen Schluss auf die zugrundeliegenden Präferenzen zu. Unter der Bedingung der Sicherheit bzw. bei gegebenen (subjektiven) Erwartungen können sich die Präferenzen ebenso gut auf die Handlungsalternativen beziehen, da Ergebnisse als Funktionswert von Handlungen aufgefasst werden können.

- **Binäre Relation** $\succ$ bzw. $\succeq$:

  Ein Akteur präferiert X streng gegenüber Y: $X \succ Y$,
  oder er präferiert X schwach gegenüber Y: $X \succeq Y$.

- Schwache **Präferenzordnung**:

  - *Vollständigkeit:* Für alle $X, Y \in M$ gilt: $X \succeq Y$ oder $Y \succeq X$ oder beides (Indifferenz $X \sim Y$).
  - *Reflexivität:* Für alle $X \in M$ gilt: $X \succeq X$ (trivial).
  - *Transitivität:* Für alle $X, Y, Z \in M$ mit $X \succeq Y$ und $Y \succeq Z$ gilt: $X \succeq Z$.

  Mit $\succ$ kann man entsprechend eine starke Präferenzortdnung definieren. Dann gilt jedoch die *Asymmetrie*: Wenn $X \succ Y$, dann gilt nicht $Y \succ X$.

- **Stetigkeit:** Für alle $Y \in M$ sind die Mengen $\{X|X \succeq Y\}$ sowie $\{X|Y \succeq X\}$ abgeschlossene Mengen. Dies impliziert, dass $\{X|X \succ Y\}$ sowie $\{X|Y \succ X\}$ offene Mengen sind.

  Anschaulich: Wenn X gegenüber Y streng vorgezogen wird, also $X \succ Y$, und es gibt ein Z, welches nahe genug bei X liegt, dann wird auch Z gegenüber Y streng vorgezogen. Diese Annahme sichert die Stetigkeit im Wahlverhalten.

Nutzenfunktion unter Sicherheit:

Axion 1 Es existiert eine schwache Präferenzordnung auf einer Alternativenmenge M.

Axiom 2 Die Präferenzordnung ist stetig.

Sind diese beiden Axiome erfüllt, dann existiert eine (stetige) **Nutzenfunktion** $u : M \to \mathbb{R}$, für die für alle $X, Y \in M$ gilt:

$$u(X) \geq u(Y) \quad \Longleftrightarrow \quad X \succeq Y$$

Diese Nutzenfunktion ist eindeutig bis auf eine positiv-affine (ordnungserhaltende) Transformation (beispielsweise positive Lineartransformation).

Der ausgewiesene Nutzenwert $u(\cdot)$ ist als *Nutzenindex* zu interpretieren. Er ist eine bequeme Art, Präferenzen formal zu repräsentieren; keine motivationale Interpretation.

Um gewisse Eigenschaften der Nutzenfunktion zu gewährleisten, werden gelegentlich weitere Anforderungen an M gestellt, etwa Konvexität (wird hier nicht behandelt).

Eine ähnliche Repräsentation der Präferenzen wird auch bei **Unsicherheit** angestrebt. Hierbei führt eine Handlungsalternative nicht zu einem eindeutigen Ergebnis. Es muss auch die Wahrescheinlichkeitsverteilung auf der Menge der möglichen Umweltzustände berücksichtigt werden.

- **Lotterie:** Eine Wahlhandlung wird durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die dazu gehörigen Ergebnisse repräsentiert. Beispiel:

$$\begin{aligned} L(\text{„Schirm“}) &= (p, \text{„bleibe trocken“}; (1-p), \text{„trage Ballast“}) \\ L(\text{„kein Schirm“}) &= (p, \text{„werde nass“}, (1-p), \text{„kein Ballast“}) \end{aligned}$$

mit p als der Wahrscheinlichkeit, dass es regnet.

Präferenzen werden jetzt über die Lotterien definiert. Schreibweise: Sei $L_1 = (p, X; (1-p), Y)$ und $L_2 = (q, W; (1-q), Z)$. Dann wird L_1 schwach vorgezogen vor L_2 (also $L_1 \succeq L_2$) wenn

$$p \circ X \oplus (1-p) \circ Y \quad \succeq \quad q \circ W \oplus (1-q) \circ Z$$

Die eigentümlichen Symbole resultieren aus dem Umstand, dass die Ergebnisse X, Y, W, Z nicht notwendigerweise (reelle) Zahlen sein müssen.

Gesucht werden Bedingungen, unter denen man Präferenzen über Lotterien ebenfalls durch eine reelle Funktion (Erwartungsnutzenfunktion) repräsentieren kann. Diese soll additiv sein, d.h. die **Erwartungsnutzen-Eigenschaft** besitzen:

$$u(p \circ X \oplus (1-p) \circ Y) = pu(X) + (1-p)u(Y)$$

Nutzenfunktion unter Unsicherheit:

Axiom 1 Es existiert eine (schwache) Präferenzordnung auf der Menge der Lotterien.

Axiom 2 Die Präferenzordnung ist stetig, d.h. für L_1, L_2, L_3 mit $L_1 \succ L_2 \succ L_3$ gibt es stets eine Wahrscheinlichkeit p, so dass L_2 indifferent ist zu $p \circ L_1 \oplus (1-p) \circ L_3$.

Axiom 3 Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Für alle L_1, L_2 mit $L_1 \succ L_2$ und ein p mit $0 < p < 1$ gilt: $p \circ L_1 \oplus (1-p) \circ L_3 \succ p \circ L_2 \oplus (1-p) \circ L_3$ für beliebige L_3.

Unter diesen Bedingungen zeigen von Neumann/Morgenstern (1944), dass eine Erwartungsnutzenfunktion mit der gewünschten Eigenschaft existiert. Diese ist wiederum eindeutig bis auf eine positiv-affine Transformation.

Es gilt dann:

$$L_1 \succ L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u(L_1) > u(L_2)$$

Schreibweisen:

Der Nutzen einer Lotterie, d.h. einer Handlungsalternative mit unsicherem Ergebnis, ist somit:

$$u(L) = u(p \circ X_1 \oplus (1-p) \circ X_2) = pu(X_1) + (1-p)u(X_2)$$

Allgemeine Schreibweise bei *diskreter* Ereignismenge:

$$u(L) = \sum_{X_i \in M} p(X_i)u(X_i) \qquad \text{mit } 0 \leq p(X_i) \leq 1,\ \sum_i p(X_i) = 1$$

Allgemeine Schreibweise bei *stetiger* Ereignismenge:

$$u(L) = \int p(X)u(X)dX \qquad \text{mit } p \text{ als Wahrscheinlichkeitsdichte auf } M$$

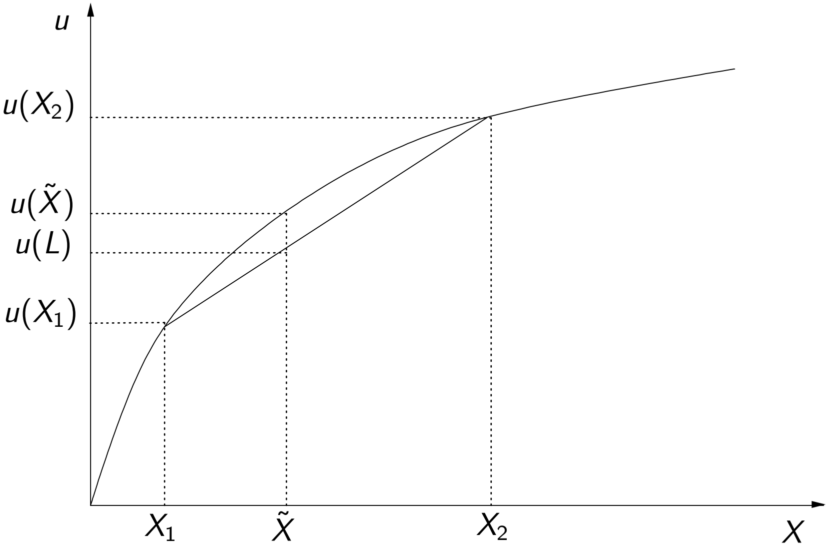
Erwartungsnutzen und Nutzen des Erwartungswertes:

Annahme: Die Ergebnisse $X_1, X_2, ...$ seien monetär. Dann drückt die Erwartungsnutzenfunktion auch die *Risikoeinstellung* des Akteurs aus.

Beispiel: Lotterie $L = (p, X_1; (1-p), X_2)$ mit $X_1 < X_2$ und sicheres Ergebnis, welches dem Erwartungswert der Lotterieauszahlung entspricht: $\tilde{X} = pX_1 + (1-p)X_2$.

Risikoneutralität:	$u(\tilde{X}) = u(L) = pu(X_1) + (1-p)u(X_2)$
Risikoscheu:	$u(\tilde{X}) > u(L) = pu(X_1) + (1-p)u(X_2)$
Risikoliebe:	$u(\tilde{X}) < u(L) = pu(X_1) + (1-p)u(X_2)$

Ein risikoaverser Akteur wäre bereit, eine **Risikoprämie** (maximal) in Höhe von $Y = u(\tilde{X}) - pu(X_1) - (1-p)u(X_2)$ zu zahlen, um die Lotterie gegen das sichere Ergebnis zu tauschen.



u
$u(X_2)$
$u(\tilde{X})$
$u(L)$
$u(X_1)$
X_1
$\tilde{X}$
X_2
X

Zurück zur Rationalität:

- Da Ergebnisse von den Strategien abhängen ($X = X(s_i, s_{-i})$), kann man für Spieler i schreiben:

$$u_i(X) = u_i(s_i, s_{-i})$$

- Von rationalem Entscheidungsverhalten wird gesprochen, wenn es konsistent mit den Annahmen der Erwartungsnutzentheorie ist:

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

  (eine entsprechende Formulierung für den Fall von Unsicherheit lernen wir später kennen.)

  $\Rightarrow$ strenge Anforderungen, enger Rationalitätsbegriff!

- „Akteure maximieren ihre (erwartete) Auszahlung“: stark verkürzte Sprechweise. Die Theorie formuliert logische Strukturen, die eine formale Repräsentation eines rationalen Wahlverhaltens erlauben.

Gegen die Nutzentheorie bzw. das Rationalitätsparadigma gibt es eine Reihe von Einwänden:

Empirische Einwände:

In Entscheidungsexperimenten werden (augenscheinlich) signifikante und robuste Abweichungen von der Theorie beobachtet, etwa Verletzungen der Transitivität oder Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen; Entscheidungen hängen vom Framing des Entscheidungsproblems ab.

Theoretische Einwände:

Interpretationsprobleme; Problem der „Allwissenheit“; Reduktionismus; mögliches Problem der Nichtfalsifizierbarkeit bei weitem Präferenzbegriff

$\Rightarrow$ erfordert eine eigene Vorlesung

Es wird im Folgenden von Rationalverhalten ausgegangen:

- **Auszahlungsfunktion** $u_i : S \to \mathbb{R}$

  Jeder Strategievektor $s \in S$ führt zu einem *Ergebnis*, welches von jedem Spieler i gemäß seiner Präferenzen *bewertet* wird: $u_i(s_i, s_{-i})$.

  Die Auszahlungen (payoffs) u_i sind *v.Neumann-Morgenstern-Nutzenwerte*. Ihre absolute Höhe ist für die normative Analyse nicht interessant, da die Nutzenfunktion eindeutig *bis auf eine positiv-affine Transformation* ist.

Achtung: Die Annahme, dass die Spieler nur an ihrem eigenen Wohl interessiert sind (z.B. eigener Konsum, eigener Gewinn) ist keineswegs zwangsläufig! Aus Vereinfachungsgründen wird häufig unterstellt, dass die Nutzenbewertung monoton von den eigenen monetären Auszahlungen abhängt. Dies ist empirisch nicht der Fall. Für die Spieltheorie ist allein die subjektive Bewertung eines Ergebnisses maßgeblich.

Kompakte Schreibweise:

$$u_i(s_1, ..., s_n) \quad \text{bzw.} \quad u_i(s_i, s_{-i})$$

Definition: Ein *Spiel in Normalform* ist gegeben durch

$$G = \{S_1, ..., S_n, u_1(\cdot), ..., u_n(\cdot)\}$$

Die Spielregeln G sind „gemeinsames Wissen“ der Spieler.

Gemeinsames Wissen (Common Knowledge):

Ein Tatbestand ist gemeinsames Wissen, wenn...

- ... jeder Spieler diesen Tatbestand kennt,
- ... jeder Spieler weiß, dass jeder andere Spieler diesen Tatbestand kennt,
- ... jeder Spieler weiß, dass jeder andere Spieler weiß, dass er selbst den Tatbestand kennt,
- ... jeder Spieler weiß, dass jeder andere Spieler weiß, dass jeder andere Spieler weiß, dass ....
- usw. usw. (infiniter Regress)

Bricht diese Kette irgendwo ab, so ist eine wechselseitige Antizipierbarkeit des Verhaltens nicht mehr sichergestellt!

Vollständige versus unvollständige Information:

Sind alle Elemente eines Normalformspiels (Spieler, Strategiemengen, Auszahlungsfunktionen) gemeinsames Wissen, dann handelt es sich um ein Spiel mit vollständiger Information.

Ist mindestens ein Element nicht gemeinsames Wissen (private Information, Informationsasymmetrie), handelt es sich um ein Spiel mit unvollständiger Information. In der Regel handelt es sich dabei um private Informationen über die Auszahlungsfunktion. In einem Normalformspiel müssen daher auch die *Erwartungen* der Spieler bzgl. des nicht gemeinsam bekannten Tatbestandes definiert werden.

Vollkommene (perfekte) versus unvollkommene (imperfekte) Information:

Perfekte Information liegt vor, wenn alle Spielzüge beobachtbar sind, d.h. jeder Spieler identifizieren kann, an welcher Stelle des Spiels er sich befindet. Bei imperfekter Information ist mindestens ein Spielzug nicht beobachtbar.

Harsyani-Doktrin: Jedes Spiel mit unvollständiger Information kann in ein Spiel mit vollständiger, aber imperfekter Information überführt werden.

Beispiel: Spieler 2 könnte die Auszahlungsfunktion u_2^A oder u_2^B haben (dies ist private Information). Für Spieler 1 stellt sich das Spiel so dar, als hätte die „Natur“ (als dritter Spieler) über den Typ von Spieler 2 entschieden, wobei Spieler 1 den „Spielzug der Natur“ nicht beobachten kann.

Simultane versus sequenzielle Entscheidungen:

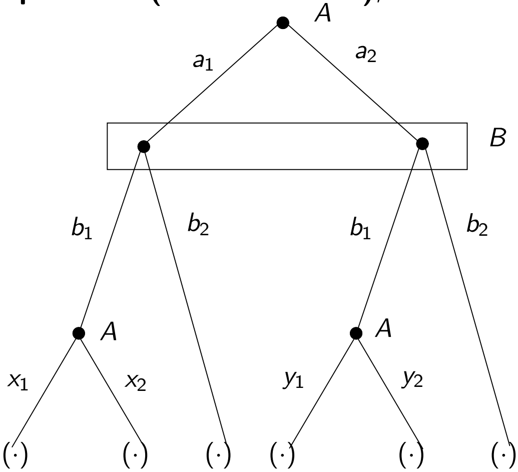
Entscheidend ist nicht die physische zeitliche Reihenfolge der Spielzüge, sondern der Umstand, ob bei einer Entscheidung des Spielers i dieser die Entscheidung eines anderen Spielers j beobachten konnte oder nicht. Hat j bereits entschieden, was aber von i nicht beobachtet werden konnte, so ist dies äquivalent zu einem simultanen Zug beider Spieler.

- Spiele, in denen mindestens ein Strategieraum stetig ist, werden in der Regel rein **analytisch** dargestellt. Die sog. Reaktionsabbildungen lassen sich meist grafisch veranschaulichen.
- **Matrixform**, z.B.:

		A	
		a_1	a_2
B	b_1	$(u_B(b_1, a_1), u_A(b_1, a_1))$	$(u_B(b_1, a_2), u_A(b_1, a_2))$
	b_2	$(u_B(b_2, a_1), u_A(b_2, a_1))$	$(u_B(b_2, a_2), u_A(b_2, a_2))$

Diese Darstellung wird häufig als statisches Spiel interpretiert. Das ist aber keineswegs zwingend: Die Strategien können auch Verhaltenspläne in einem dynamischen Ablauf repräsentieren.

- **Spielbaum (extensive Form)**, z.B.



Begriffe: Knoten, Zweige (Kanten), Auszahlungsvektoren, Informationsbezirk

„Generisches Spiel“:

Möglichst einfaches Spiel mit einer charakteristischen Struktur, die in unterschiedlichen (ökonomischen) Kontexten zu finden ist. Die Benennung der Strategien und die absolute Höhe der Auszahlungen sind dabei unwichtig.

Gefangenendilemma (prisoner´s dilemma):

		A	
		K	D
B	K	$(3,3)$	$(0,5)$
	D	$(5,0)$	$(1,1)$

- „K“ooperieren, „D“efektieren.
- D ist eine sog. „dominante Strategie“ und (D, D) die (Nash-) Lösung des Spiels.
- Beide würden sich mit (K, K) besser stellen, d.h. die Nash-Lösung ist pareto-inferior. Individuell rationales Handeln führt zu kollektiv inferioren Ergebnissen.
- Anwendungen: z.B. öffentliche Güter

Kampf der Geschlechter (batte of sexes):

		Er	
		Tanzen	Tennis
Sie	Tanzen	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	Tennis	$(0, 0)$	$(1, 2)$

- Koordinationsproblem: zwei (Nash-) Lösungen
- Zwar gibt es unterschiedliche Präferenzen bezüglich Tanzen und Tennis, aber ein dominierendes gemeinsames Interesse an einer gemeinschaftlichen Tätigkeit.

Chicken Game:

		A	
		chicken	tough
B	chicken	$(0, 0)$	$(0, 5)$
	tough	$(5, 0)$	$(-100, -100)$

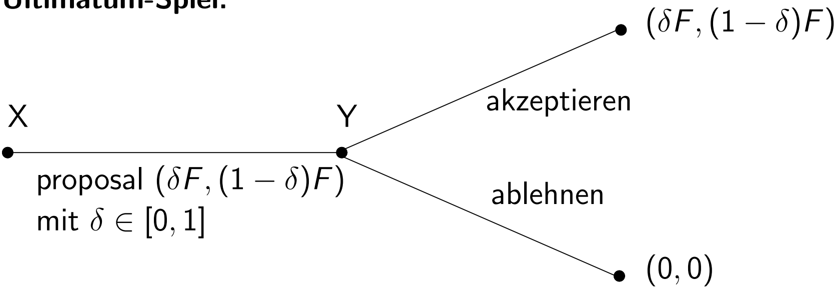
- Film „*Denn sie wissen nicht, was sie tun*“.
- Koordinationssproblem: zwei (Nash-) Lösungen
- rein antagonistische Interessen

Matching Pennies:

		A	
		Kopf	Zahl
B	Kopf	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	Zahl	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- Diskoordinationsspiel: kein Gleichgewicht in reinen Strategien
- (Nash-) Lösung in sog. „gemischten Strategien“
- Beispiel: Torwart – Torschütze

Ultimatum-Spiel:



- Letzte Stufe eines sequentiellen Verhandlungsprozesses über Aufteilung von F.
- (Nash-) Lösung: δ nahe 1.
- Eklatanter Widerspruch zu realem Verhalten.

3. Das Nash-Gleichgewicht als Lösungskonzept

Gliederung:

Beispiel Gefangenendilemma:

		A	
		K	D
B	K	$(3, 3)$	$(0, 5)$
	D	$(5, 0)$	$(1, 1)$

- Die beste (optimale) Antwort auf D ist D.
- Die beste Antwort auf K ist ebenfalls D.
- Strategie K wird von Strategie D *streng dominiert*!

Definition: Gegeben $s_i, s_i' \in S_i$. Dann wird s_i von s_i' *streng dominiert*, wenn gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Definition bezieht sich auf einen *paarweisen* Vergleich!
- Eine streng dominierte Strategie wird niemals gewählt werden.
- Da auch die anderen Spieler dies wissen (gemeinsames Wissen), kann eine streng dominierte Strategie *eliminiert* werden.

- *Achtung:* Eine streng dominierte Strategie wird niemals gewählt. Aber eine Strategie, die niemals gewählt wird, ist nicht zwangsläufig auch streng dominiert! Siehe folgendes Beispiel, in dem b_1 niemals die beste Alternative ist:

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	$(2, \cdot)$	$(1, \cdot)$	$(0, \cdot)$
	b_2	$(3, \cdot)$	$(0, \cdot)$	$(1, \cdot)$
	b_3	$(1, \cdot)$	$(3, \cdot)$	$(2, \cdot)$

- **Definition:** Dominiert $s_i' \in S_i$ *jede* andere Strategie $s_i \in S_i - \{s_i'\}$ streng, so heißt s_i' *streng dominante* Strategie.

Definition: Gegeben $s_i, s_i' \in S_i$. Dann wird s_i von s_i' *schwach dominiert*, wenn gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

und $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ für mindestens ein $s_{-i} \in S_{-i}$.

- Ob eine schwach dominierte Strategie jemals gewählt werden wird, kann nicht ohne weiteres gesagt werden.
- Eine Elimination schwach dominierter Strategien kann daher dazu führen, dass auch Nash-Lösungen eliminiert werden!
- Im Gegensatz zu streng dominierten Strategien kann das Spielergebnis von der *Reihenfolge* der Elimination schwach dominierter Strategien abhängen.

Beispiel: Nash-Gleichgewicht in schwach dominierten Strategien

		A	
		a_1	a_2
B	b_1	$(0, 5)$	$(3, 5)$
	b_2	$(1, 3)$	$(3, 2)$

- Strategie b_1 wird von b_2 schwach dominiert.
- Strategie a_2 wird von a_1 schwach dominiert.
- Es gibt zwei Nash-Gleichgewichte: (a_1, b_2) und (a_2, b_1). Das zweite ist pareto-effizient, aber beide Spieler wählen dort eine schwach dominierte Strategie!

Wiederholte Elimination streng dominierter Strategien

Beispiel:

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	$(0,5)$	$(4,4)$	$(0,4)$
	b_2	$(0,3)$	$(3,3)$	$(1,2)$
	b_3	$(1,4)$	$(4,2)$	$(1,2)$

Beispiel (Forts.):

- b_1 und b_2: keine Dominanzbeziehung
- b_1 und b_3: b_3 dom. b_1 schwach
- b_2 und b_3: b_3 dom. b_2 schwach
- a_1 und a_2: a_1 dom. a_2 schwach
- a_1 und a_3: a_1 dom. a_3 **streng**
- a_2 und a_3: a_2 dom. a_3 schwach

$\Rightarrow$ Strategie a_3 kann eliminiert werden!

Beispiel (Forts.):

		A	
		a_1	a_2
B	b_1	$(0, 5)$	$(4, 4)$
	b_2	$(0, 3)$	$(3, 3)$
	b_3	$(1, 4)$	$(4, 2)$

- Jetzt wird b_2 von b_3 **streng** dominiert.
- b_2 eliminieren!

Beispiel (Forts.):

		A	
		a_1	a_2
B	b_1	$(0, 5)$	$(4, 4)$
	b_3	$(1, 4)$	$(4, 2)$

- Jetzt wird a_2 von a_1 **streng** dominiert.
- Strategie a_2 eliminieren.
- Nach Elimination von a_2 ist zu erkennen, dass b_1 von b_3 streng dominiert wird und somit eliminiert wird.
- Einzige verbleibende Strategiekombination: (b_3, a_1)

Hinweise:

- In der Regel wird aber durch wiederholte Elimination streng dominierter Strategien keine eindeutige Lösung gefunden.
- Die (wiederholte) Elimination streng dominierter Strategien wird damit begründet, dass es gemeinsames Wissen ist, dass diese Strategien niemals gewählt werden.
- Das ist bei lediglich schwach dominierten Strategien anders (Beispiel siehe oben). Werden diese dennoch eliminiert, dann können nicht nur Nash-Gleichgewichte eliminiert werden, es können auch Komplikationen bezüglich der Reihenfolge der Elimination entstehen.

Beispiel zur Elimination schwach dominierter Strategien:

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	$(2,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$
	b_2	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,10)$
	b_3	$(10,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$

- Kein Spieler hat streng dominierte Strategien.
- *Spieler B beginnt:* Elimination von b_2, danach Elimination von a_3, dann Elimination von b_1.
- *Spieler A beginnt:* Elimination von a_1, danach Elimination von b_3, dann Elimination von a_2.

- Die unterstellte *Rationalität* der Spieler erfordert, dass jeder Spieler seine Auszahlungen maximiert.
- Ein rationaler Spieler i wird stets diejenige Strategie wählen, die bei gegebenen Erwartungen bezüglich der Strategiewahl der anderen Spieler (s^e_{-i}) seine Auszahlungen maximiert:

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s^e_{-i})$$

- Eine Lösung eines Spiels (ein Gleichgewicht) darf nicht darauf beruhen, dass die Spieler ihre Entscheidung auf der Grundlage systematisch falscher Erwartungen treffen. Die Spieler können nur dann einer Empfehlung eines Strategievektors folgen, wenn sie sicher sind, dass ihnen keine Fehlinformationen über das Verhalten der anderen Spieler gegeben werden.

Beste Antwort-Abbildung:

- Das Ergebnis einer Auszahlungsmaximierung von Spieler i ist:

  $$s_i^* \in f_i(s_{-i}^e)$$

  Die Abbildung f_i ordnet jedem (erwarteten) Verhalten der anderen Spieler (mindestens) eine auszahlungsmaximierende Antwort zu.
- In einigen Fällen ist s_i^* stets eindeutig, dann ist f_i eine Beste-Antwort-*Funktion* ($s_i^* = f_i(s_{-i}^e)$).
- In anderen Fällen gibt es mehrere Strategien $s_i^* \in S_i$, die eine beste Antwort darstellen. Dann spricht man von einer Beste-Antwort-*Korrespondenz*.

Axiome:

A1 Es gelte $s_i = s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^e)\ \forall i$.

Alle Spieler verhalten sich *rational*, d.h. wählen stets die „beste Antwort“ auf das erwartete Verhalten der anderen Spieler.

A2 Es gelte $s_{-i}^e = s_{-i}^*\ \forall i$.

Jeder Spieler erwartet, dass die anderen Spieler sich *gleichgewichtig* verhalten, d.h. ebenfalls ihre Auszahlungen maximieren, und diese Erwartungen seien auch zutreffend.

Eine Strategievektor (s_i^*, s_{-i}^*), der diese Bedingungen erfüllt, ist ein **Nash-Gleichgewicht**. Anders ausgedrückt: Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategievektor (s_i^*, s_{-i}^*) mit

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i,\ \forall i$$

Einige zentrale Aussagen:

- Ein Gleichgewicht in dominanten Strategien ist stets ein Nash-Gleichgewicht.
- Wird durch wiederholte Elimination streng dominierter Strategien eine eindeutige Lösung gefunden, dann ist diese Lösung ein Nash-Gleichgewicht.
- Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategievektor, der **wechselseitig beste Antworten** darstellt, also ein Fixpunkt des Systems $f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)$.
- Ein Nash-Gleichgewicht ist selbst-stabilisierend (*self-enforcing*), weil die Erwartungen rational sind, und kein Anreiz besteht, unilateral seine Strategie zu verändern. Das ist nötig, wenn keine bindenden Verträge möglich sind (nicht-kooperative Spieltheorie).

Existenz von Nash-Gleichgewichten:

Die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes ist nicht sichergestellt (Beispiel: matching pennies). Unter weiteren Annahmen kann jedoch die Existenz mindestens eines Nash-Gleichgewichtes gesichert werden.

Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten:

Das Lösungskonzept nach Nash führt nicht zwangläufig zu eindeutigen Lösungen (Beispiele: Kampf der Geschlechter, Chicken Game).

Effizienz von Nash-Gleichgewichten:

Die Paretoeffizienz von Nash-Gleichgewichten ist nicht sichergestellt (Beispiel Gefangenendilemma).

Bei der Nash-Lösung wird davon ausgegangen, dass die Spieler stets die „beste Antwort“ auf die erwartete Strategien der anderen Spieler wählen (Rationalverhalten).

Eine alternative Verhaltenshypothese: **Maxmin-Verhalten**

„Die anderen Spieler versuchen, mich möglichst schlecht zu stellen. Daher wähle ich die Strategie, bei der ich im ungünstigsten Fall am besten abschneide.“

$$\max_{s_i \in S_i} \left[\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \right]$$

Beispiel:

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	(8,8)	(3,-3)	(-6,6)
	b_2	(2,4)	(-1,1)	(3,-3)
	b_3	(-6,-6)	(4,-4)	8,-8)

Mit *Maxmin* wählt Spieler A Strategie a_2 und Spieler B die Strategie b_2. In diesem Fall erscheint das Verhalten nicht rational im Vergleich zur Nash-Lösung (a_1, b_1).

Bei sog. Nullsummen-Spielen erscheint Maxmin plausibel, jedoch fällt dann die Maxmin- mit der Nash-Lösung zusammen.

Wir gehen im Folgenden von einer endlichen Zahl reiner Strategien aus. Wir ändern dafür die Notation für Strategien und Strategieräume vorübergehend:

$$X_i = \{x_{i1}, ..., x_{im_i}\}$$

Ein Spieler kann nun *randomisieren*, d.h. die reinen Strategien x_{ij} jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p_{ij} wählen.

Die Menge aller gemischten Strategien ist demnach gegeben durch:

$$S_i = \{(p_{i1}, ..., p_{im_i}) \mid 0 \leq p_{ij} \leq 1 \forall j, \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1\}$$

mit $s_i \in S_i$ als einer gemischten Strategie.

Beispiel:

Es sei $X_i = \{a_1, a_2\}$. Dann ist eine gemischte Strategie s_i gegeben durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung $s_i = (\mu, 1-\mu)$. Das bedeutet:

$$s_i = \begin{cases} \text{Spiele } a_1 & \text{mit } p_1 = \mu \\ \text{Spiele } a_2 & \text{mit } p_2 = 1-\mu \end{cases}$$

Hinweis:

Reine Strategien sind ein *Spezialfall* von gemischten Strategien! Die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse liegt dann auf einer reinen Strategie, also hier:

$$s_{i1} = (1,0) \equiv a_1, \qquad s_{i2} = (0,1) \equiv a_2$$

Die *Existenz eines Nash-Gleichgewichtes* ist sichergestellt, wenn gilt:

- S_i ist kompakt und konvex für alle i.
- $u_i(s_i, s_{-i})$ ist stetig und begrenzt sowie quasi-konkav in S_i für alle i.

Diese Bedingungen sind bei Zulassung gemischter Strategien erfüllt!

Hinweis: Kritisch zu diskutieren ist die Vereinbarkeit des Randomisierens mit der Rationalitätsannahme (vgl. dazu die Ausführungen bei Holler/Illing).

Beispiel:

		A	
		a_1 (p)	a_2 $(1-p)$
B	b_1 (q)	$(0, 0)$	$(2, 1)$
	b_2 $(1-q)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$

- Mit $p, 1-p$ und $q, 1-q$ werden jeweils die Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, mit denen die entsprechenden reinen Strategien gespielt werden.

Erwartete Auszahlung von Spieler B:

$$E[u(q,p)] = qp \cdot 0 + q(1-p) \cdot 2 + (1-q)p \cdot 1 + (1-q)(1-p) \cdot 0$$

$$\frac{\partial E[u(q,p)]}{\partial q} = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 - p \cdot 1 - (1-p) \cdot 0 = 0 \quad \text{(BEO)}$$

Umformung der Bedingung erster Ordnung ergibt

$$\underbrace{p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2}_{E[u(b_1,p)]} = \underbrace{p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0}_{E[u(b_2,p)]}$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2p = p$$

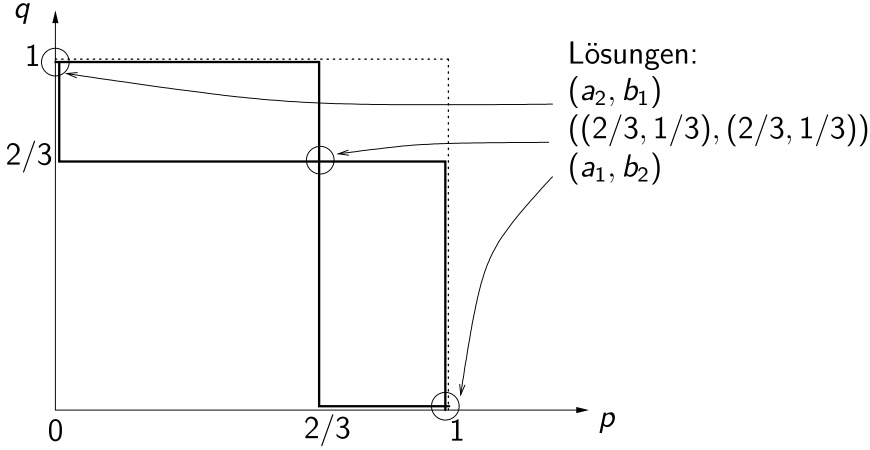
$$\Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}$$

Interpretation:

- Die erwarteten Auszahlungen bei Wahl der reinen Strategien b_1 und b_2 hängen offenbar stetig und monoton von p ab.
- Bei einer gemischten Strategie von Spieler A mit $p = 2/3$ ist Spieler B *indifferent* zwischen b_1 und b_2. Jede beliebige Mischung q stellt somit
- Je nach Höhe von $p \neq 2/3$ ist entweder b_1 oder b_2 *eindeutig* die beste Antwort (also $q = 1$ oder $q = 0$). eine beste Antwort dar.
- Die Beste-Antwort-Abbildung $q = f(p)$ ist somit gegeben durch:

$$q = \begin{cases} 0 & \text{falls } 2/3 < p \leq 1 \\ \in [0, 1] & \text{falls } p = 2/3 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq p < 2/3 \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen gilt für Spieler A dasselbe! Eine grafische Darstellung der Beste-Antwort-Korrespondenzen ergibt folgendes Bild:



Die Nash-Lösungen des Spiels sind gegeben durch die Schnittpunkte der Beste-Antwort-Korrespondenzen.

Dementsprechend gibt es hier drei Nash-Lösungen: zwei in reinen und eine in gemischten Strategien.

Beim Spiel „Matching Pennies“ gibt es gar keine Nash-Lösung in reinen Strategien. Als Übung ist die Lösung $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$ zu ermitteln und die Beste-Antwort-Korrespondenzen grafisch darzustellen.

4. Statische Spiele: Ökonomische Anwendungen

Gliederung:

Annahmen:

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ (Duopol)
- *Homogene* Güter: einheitlicher Preis.
  Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch

$$p(x) = \begin{cases} a - x & \text{falls } x = x_1 + x_2 \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Anbieter verwenden die *Menge* als Strategievariable:
  $s_i = x_i \in \mathbb{R}_0^+ = S_i, i = 1, 2$
- Konstante identische Grenzkosten: $K_i(x_i) = cx_i, i = 1, 2$
- Dies alles ist gemeinsames Wissen.

Die *Auszahlungen* entsprechen der Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} u_i(x_i, x_j) = G_i(x_i, x_j) &= p(x)x_i - K_i(x_i), \qquad j \neq i \\ &= (a - x_i - x_j)x_i - cx_i \\ &= ax_i - x_i^2 - x_i x_j - cx_i \end{aligned}$$

Die *Beste-Antwort-Funktion* (Reaktionsfunktion) ergibt sich durch Maximierung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = a - c - 2x_i - x_j = 0 \qquad \text{(BEO)} \\ \Rightarrow \quad & x_i^* = \frac{a - c - x_j}{2} = R_i(x_j) \\ \Rightarrow \quad & x_j^* = \frac{a - c - x_i}{2} = R_j(x_i) \quad \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Zur Interpretation:

- Zwar werden die Beste-Antwort-Funktionen auch „Reaktionsfunktionen" genannt, aber es findet keine „Reaktion" im Sinne einer zeitlichen Abfolge statt.
- Die Funktionen $R_i(x_j)$ beschreiben die optimale Strategiewahl (Menge) bei *hypothetischen* Mengensetzungen des Konkurrenten.
- Jeder Spieler i bildet Erwartungen über die Strategiewahl des Spielers j. Diese hängt aber von dessen Erwartungen über Spieler i ab. Ein Gleichgewicht erfordert eine korrekte Antizipation: Erwartetes und realisiertes Verhalten sind identisch.
- Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen: wechselseitig beste Antwort (Nash-Gleichgewicht).

Cournot-Nash-Gleichgewicht:

Auflösen von $x_1 = R_1(x_2)$ nach x_2 und Gleichsetzen mit $x_2 = R_2(x_1)$ ergibt:

$$\begin{aligned} a - c - 2x_1 \quad (= x_2) \quad &= \frac{a - c - x_1}{2} \\ 2a - 2c - 4x_1 &= a - c - x_1 \\ a - c &= 3x_1 \\ x_1^* &= \frac{a-c}{3} = x_2^* \quad \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Alternativ kann auch $R_i(x_j)$ in $R_j(x_i)$ eingesetzt und nach x_j aufgelöst werden.

Die Cournot-Nash-Lösung lautet somit

$$\left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3} \right)$$

Die Gesamtmenge am Markt beträgt dann

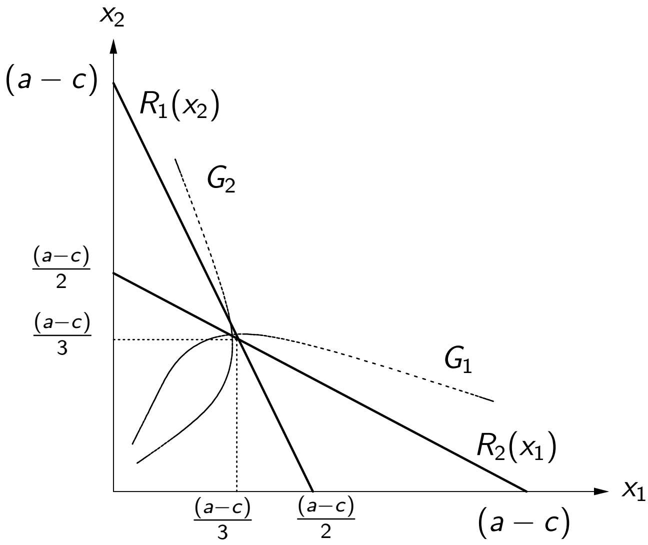
$$x = x_1^* + x_2^* = \frac{2}{3}(a - c)$$

Der Marktpreis ist dann

$$p = a - \frac{2}{3}(a - c) = \frac{a + 2c}{3}$$

Und der jeweilige Gewinn ist

$$G_i = \left(\frac{a + 2c}{3} - c\right)\frac{a - c}{3} = \left(\frac{a - c}{3}\right)^2 = \frac{(a - c)^2}{9}$$



x_2
$(a-c)$
$R_1(x_2)$
G_2
$\frac{(a-c)}{2}$
$\frac{(a-c)}{3}$
G_1
$R_2(x_1)$
x_1
$\frac{(a-c)}{3}$
$\frac{(a-c)}{2}$
$(a-c)$

Vergleich mit der Lösung bei vollkommener Konkurrenz:

$$\begin{aligned} p &= K' \qquad \text{(BEO)} \\ p = a - x &= c \\ \Rightarrow \quad x &= a - c \end{aligned}$$

Die Gesamtmenge beim Duopol wird daher auch als „Zwei-Drittel-Lösung“ bezeichnet.

Vergleich mit der Lösung beim Monopol:

$$\text{Grenzerlös} = K'$$
$$a - 2x = c$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-c}{2}$$

Offenbar gilt $\quad x^{Monopol} < x^{Duopol} < x^{Konkuurenz}$.

Hinweise:

- Duopol mit quadratischen Kostenfunktionen und Fixkosten.
- Duopol mit unterschiedlichen Kostenfunktionen
  $\rightarrow$ keine Symmetrie der Lösung mehr!
- Sind Fixkosten vorhanden, so ist zusätzlich entscheidend, ob der Gewinn trotz Fixkosten positiv ist, oder ob das Unternehmen (langfristig) aus dem Markt ausscheidet.
- Was würde passieren, wenn bei homogenen Gütern der Preis als Strategievariable verwendet wird?

Erweiterung des Modells auf n (identische) Anbieter:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a - \sum_j x_j \qquad \text{(PAF)} \\
G_i(x_i, x_{-i}) &= (a - \sum_j x_j)x_i - cx_i \\
&= ax_i - \sum_{j \neq i} x_j x_i - x_i^2 - cx_i \\
\frac{\partial G_i}{\partial x_i} &= a - c - \sum_{j \neq i} x_j - 2x_i = 0 \quad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow \quad x_i^* &= \frac{a - c - \sum_{j \neq i} x_j}{2} = R_i(x_{-i})
\end{aligned}
$$

Wegen der Symmetrie gilt im Nash-Gleichgewicht:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n$$

und somit

$$\sum_{j \neq i} x_j = (n-1)x_j = (n-1)x_i$$

Einsetzen in die Reaktionsfunktion:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a - c - (n-1)x_i}{2} \\ \Rightarrow \quad x_i &= \frac{a-c}{n+1} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{n}{n+1}(a-c) \end{aligned}$$

Kartell:

- Beide Unternehmen können ihren Gewinn erhöhen, wenn sie die Mengen beschränken (Mengenkartell).
- Das optimale Mengenkartell liegt vor, wenn sich beide Anbieter so verhalten wie ein einziger Monopolist: $x_i^K = 0.5 \cdot x^{Monopol}$.
- Da förmliche Kartellverträge nicht erlaubt sind und die Möglichkeit des Vertragsschlusses bei nicht-kooperativen Spielen auch nicht besteht, müssten die Anbieter ihr Verhalten aufeinander abstimmen (kollusives Verhalten).

Kartell: (Forts.)

- In einem einmalig gespielten Spiel kann ein solches Kartell keinen Bestand haben, weil $R_i(x_j^K) \neq x_i^K$, d.h. die beste Antwort auf die Kartelleinhaltung des anderen ist es, das Kartell zu brechen. Dies gilt für beide. Der Kartellbruch kann wechselseitig antizipiert werden. Die Kartellmengen (x_1^K, x_2^K) erfüllen somit nicht die Eigenschaften eines Gleichgewichts.
- Kollusives Verhalten ist möglich u.a. bei unendlich oft wiederholten Spielen.

Annahmen:

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ (Duopol)
- *Heterogene* substitutive Güter: Nachfragefunktionen gegeben durch

$$x_i(p_i, p_j) = \begin{cases} a - p_i + bp_j & \text{falls } p_i < a + bp_j \quad (0 < b < 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Anbieter verwenden den *Preis* als Strategievariable: $s_i = p_i \in \mathbb{R}_0^+ = S_i, i = 1, 2$
- Konstante identische Grenzkosten: $K_i(x_i) = cx_i, i = 1, 2$
- Dies alles ist gemeinsames Wissen.

Die Gewinnfunktionen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} G_i(p_i, p_j) &= x_i(p_i, p_j)(p_i - c) \\ &= (a - p_i + bp_j)(p_i - c) \\ &= ap_i - p_i^2 + bp_j p_i - ca + cp_i - cbp_j \end{aligned}$$

Maximierung ergibt

$$\frac{\partial G_i}{\partial p_i} = a + c - 2p_i + bp_j = 0 \quad \text{(BEO)}$$

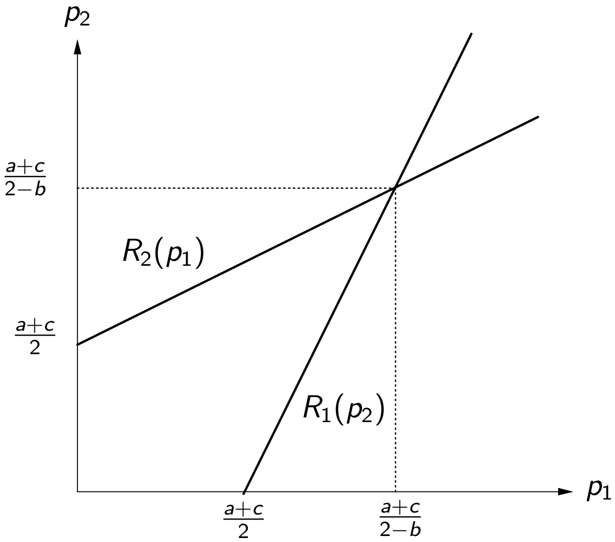
$$\Rightarrow \quad p_i^* = R_i(p_j) = \frac{a + c + bp_j}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p_j^* = R_j(p_i) = \frac{a + c + bp_i}{2} \quad \text{(aus Symmetriegründen)}$$

Bertrand-Nash-Gleichgewicht:

Auflösen von $p_2 = R_2(p_1)$ nach p_1 und Gleichsetzen mit $p_1 = R_1(p_2)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{a + c - 2p_2}{-b} &= \frac{a + c + bp_2}{2} \\
2a + 2c - 4p_2 &= -ab - bc - b^2 p_2 = -b(a + c) - b^2 p_2 \\
2(a + c) + b(a + c) &= (4 - b^2)p_2 \\
(2 + b)(a + c) &= (2 - b)(2 + b)p_2 \\
\Rightarrow \quad p_2^* &= \frac{a + c}{2 - b} = p_1^*
\end{aligned}$$



p_2
$\frac{a+c}{2-b}$
$\frac{a+c}{2}$
$R_2(p_1)$
$R_1(p_2)$
p_1
$\frac{a+c}{2}$
$\frac{a+c}{2-b}$

Hinweise:

- Die Nachfragefunktionen und die Kostenfunktionen können auch nicht-symmetrisch sein!
- Bei heterogenen Gütern ist neben Preis- auch Mengenwettbewerb (oder Mischungen aus beidem) möglich.
- Bei Mengenwettbewerb besteht das Problem, dass das Zustandekommen der Preise letztlich nicht überzeugend geklärt ist.
- Preis-Kartell.

Öffentliches Gut:

- Nicht-Ausschließbarkeit von der Nutzung
- Keine Rivalität im Konsum

Problem:

Fehlender Anreiz, das Gut herzustellen oder einen Beitrrag für dessen Herstellung zu leisten (*Free-Rider-Verhalten*) $\Rightarrow$ Gefangenendilemma.

Beispiele:

Landesverteidigung, Rechtssicherheit, Wissen, Klimaschutz

Eine einfache lineare Payoff-Funktion:

$$u_i(g_i, g_{-i}) = y - g_i + a \sum_{j=1}^{n} g_j, \qquad \frac{1}{n} < a < 1$$

mit y als Anfangsausstattung und $g_i \in [0, y]$ als Betrag, den Spieler i zur Produktion eines öffentlichen Gutes abgibt (Strategie).

Das öffentliche Gut wird im Umfang der geleisteten Beträge $\sum_j g_j$ hergestellt und kommt jedem Spieler zugute – unabhängig von dessen Beitrag (Nichtausschließbarkeit, Nichtrivalität).

Parameter a gibt den marginalen Rückfluss des eigenen Beitrags an, der in ein öffentliches Gut investiert wird.

Kalkül:

$$\max_{g_i \in [0,y]} u_i(g_i, g_{-i}) = y - g_i + a \sum_{j=1}^{n} g_j$$

führt zu der Randlösung $g_i = 0$ für alle i unabhängig von den Entscheidungen der anderen Spieler (Free riding ist dominante Strategie).

Im Nash-Gleichgewicht ist $u_i = y$ für alle i. Paretoeffizient ist hingegen $g_i = y$, denn:

$$u_i(y, ..., y) = 0 + a \sum_{j=1}^{n} y = a \cdot n \cdot y > y$$

(weil $a > 1/n$).

Allmende-Gut:

- Nicht-Ausschließbarkeit von der Nutzung
- Rivalität im Konsum

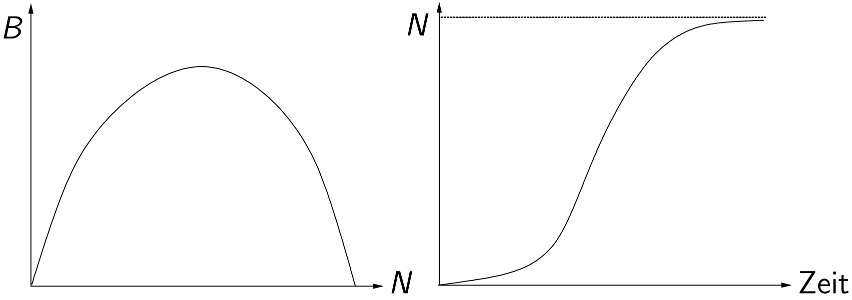
Problem:

Wegen der Nicht-Ausschließbarkeit wird das Gut in stärkerem Maße genutzt als es effizient wäre: „Tragik der Allmende".

Beispiele:

Umweltgüter, im folgenden Beispiel: Nutzung eines Fischbestands in internationalen Gewässern.

- Aktueller Fischbestand: N
- Maximaler Fischbestand (carrying capacity): K
- Geburtenrate (Bestandszunahme pro Zeiteinheit): $B = g \cdot N(1 - N/K)$



- Fischereiaufwand (z.B. Bootsstunden): E
- Fangerfolg (Fang pro Zeiteinheit): $C = a \cdot E \cdot N$
- Gleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} C &= B \\ aEN &= gN(1 - N/K) \\ \Rightarrow \qquad N^* &= K - \frac{a}{g}KE \qquad (*) \end{aligned}$$

und somit ist der gleichgewichtige Fangerfolg

$$C = aKE - \frac{a^2}{g}KE^2 \qquad (**)$$

Derselbe Fangerfolg kann durch zwei Aufwandsniveaus erreicht werden (nur das geringere Aufwandsniveau ist effizient).

Die Fischressource wird von zwei unabhängigen Spielern $i = 1, 2$ befischt. Es gilt nun:

$$E = E_1 + E_2$$
$$C = C_1 + C_2$$

Es sei angenommen, dass der relative Fangerfolg dem relativen Aufwand entspricht: $C_i/C = E_i/E = E_i/(E_1 + E_2)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E_1}{E_1 + E_2} \cdot C \\ &= \frac{E_1}{E_1 + E_2} \cdot \left(aK(E_1 + E_2) - \frac{a^2}{g} K(E_1 + E_2)^2 \right) \\ &= \left(aK - \frac{a^2}{g} KE_2 \right) E_1 - \frac{a^2}{g} KE_1^2 \end{aligned}$$

(analog für Unternehmen 2).

Der Fangertrag hängt vom eigenen Aufwand und vom Aufwand des anderen Spielers ab.

- *Kosten:* $w \cdot E_i$, *Erlös:* $p \cdot C_i$, *Gewinn:*

$$\pi_1(E_1, E_2) = p\left(\left(aK - \frac{a^2}{g}KE_2\right)E_1 - \frac{a^2}{g}KE_1^2\right) - wE_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial E_1} = p \cdot \left(aK - \frac{a^2}{g}KE_2\right) - 2p\frac{a^2}{g}KE_1 - w = 0 \quad \text{(BEO)}$$

$$\Rightarrow \quad E_1^*(E_2) = \frac{g}{2a} - \frac{wg}{2a^2pK} - \frac{1}{2}E_2$$

  Analog ergibt sich die Reaktionsfunktion für Unternehmen 2.

- Nash-Lösung:

$$E_1^* = E_2^* = \frac{g}{3a} - \frac{wg}{3a^2pK}$$

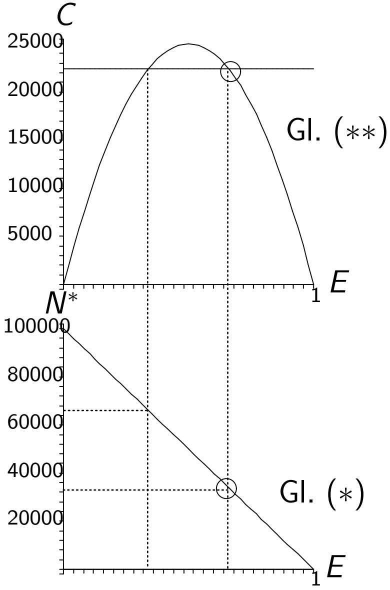
Die grafische Darstellung der Reaktionsfunktionen entspricht der im Cournot-Duopol.

Ineffizienz der Marktlösung: Für $a = 0.2, g = 0.2,$ $K = 100000, w = 100, p = 0.1$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 0.33 \quad &\Rightarrow \quad E = 0.66 \\ C_1 = C_2 = 11220 \quad &\Rightarrow \quad C = 22440 \end{aligned}$$

Einsetzen von C in Gleichung $(**)$ ergibt jedoch, dass dieselbe Fangmenge mit einem Aufwand von $E = 0.34$ hätte erbracht werden können (siehe folgende Grafik). Durch Kooperation könnte die Ressource deutlich weniger intensiv genutzt werden und dennoch denselben Nutzen stiften.

Einsetzen von E in Gleichung $(*)$ zeigt, dass der gleichgewichtige Fischbestand viel niedriger ist, also bei der technisch effizienten Lösung $E = 0.34$.


C
25000
20000
15000
10000
5000
E
1
Gl. (∗∗)
N*
100000
80000
60000
40000
20000
E
1
Gl. (∗)

5. Dynamische Spiele

Gliederung:

Statisches Spiel:

- Strategien werden unabhängig voneinander („simultan“) getroffen.

Dynamisches Spiel:

- Mindestens ein Spieler kann einen Spielzug eines anderen Spielers beobachten, bevor er einen eigenen Spielzug durchführt („sequenzielle Entscheidungen“).
- Mindestens eine Entscheidung hat dann eine „Vorgeschichte“.
- Eine spezielle Form eines dynamischen Spiels ist ein wiederholtes Spiel (wird gesondert behandelt).

In einem dynamischen Spiel besachreibt eine Strategie, wie sich der Spieler in Abhängigkeit von möglichen Vorgeschichten jeweils entscheided („bedingte Entscheidungen“).

Eine Strategie beschreibt somit den *Verhaltensplan für das gesamte* Spiel, d.h. auch für solche Spielsituationen, in die der Spieler – in Abhängigkeit von der Vorgeschichte – gar nicht kommen wird.

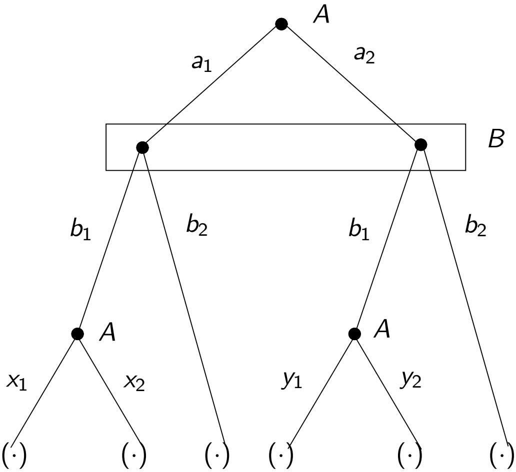
Definition: Das **Gesamtspiel** G beschreibt alle denkbaren (dynamischen) Verhaltenspläne für alle Spieler sowie die jeweils daraus resultierenden Auszahlungen.

Definition: Ein **Teilspiel** ist derjenige Teil (Ausschnitt) des Gesamtspiels, der für sich genommen ein vollständiges Spiel darstellt.

In einer bestimmten Spielsituation betrachten die Spieler die bisherige Vorgeschichte als gegeben. Die früheren Entscheidungen sind getroffen worden und nicht mehr revidierbar. Was nun folgt, kann als eigenständiges (Teil-) Spiel ausgefasst werden, welches mit den üblichen Methoden analysiert und gelöst werden kann.

Die Begriffe Gesamtspiel und Teilspiel sind am leichtesten anhand der extensiven Spielform zu erläutern.

Wiederholung: Extensive Form (Spielbaum)



- **Knoten:** Entscheidungssituation eines Spielers
- **Spielzug** (Ast, Zweig, Kante): Entscheidung eines Spielers an einem Knoten
- **Auszahlungsvektoren** am Ende jedes letzten Spielzuges, d.h. am Ende jedes möglichen Spielverlaufs $(\cdot)$
- **Informationsbezirk:** Zusammenfassung derjenigen Knoten, deren Vorgeschichte vom betreffenden Spieler nicht beobachtet werden kann.
- Jeder Knoten (außer dem Anfangsknoten) wird genau von *einem* Spielzug (Ast) erreicht! Es darf keine rekursiven Verknüpfungen geben.
- Der mit einem Knoten beginnende Teil eines Spielbaums, der nicht durch Informationsbezirke mit anderen Teilen des Spielbaums verbunden ist, stellt ein *Teilspiel* dar.

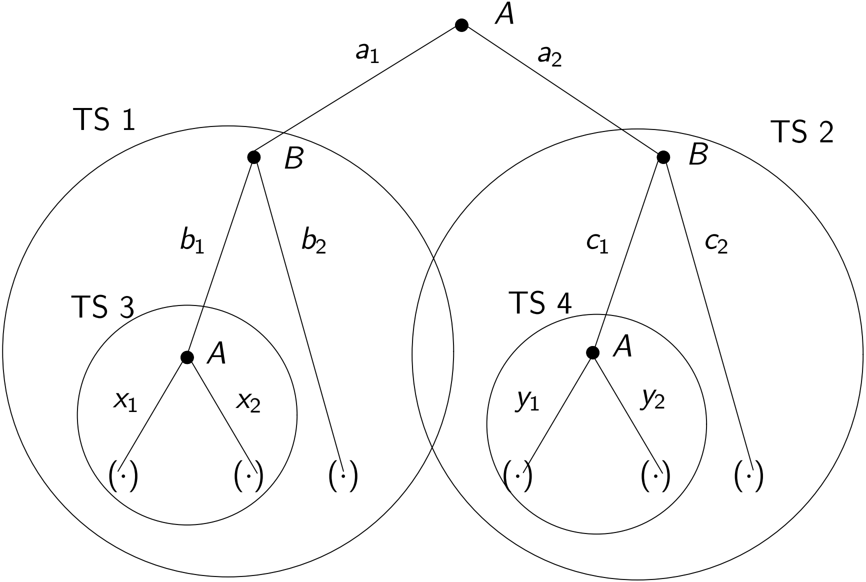
Spieler B**:** Da die erste Entscheidung von Spieler A nicht beobachtet werden kann (Informationsbezirk), ist die Strategiemenge von Spieler B:

$$S_B = \{b_1, b_2\}$$

Spieler A**:** Je nachdem, ob Spieler A sich für a_1 oder a_2 entscheided, *kann* er in die Situation kommen, zwischen x_1 und x_2 oder zwischen y_1 und y_2 entscheiden zu müssen. Da es jedoch ausgeschlossen ist, dass Spieler A nach der Wahl von a_1 (bzw. a_2) jemals in die Situation kommt, zwischen y_1, y_2 (bzw. x_1, x_2) entscheiden zu müssen, ist die Strategiemenge gegeben durch:

$$S_A = \{(a_1, x_1), (a_1, x_2), (a_2, y_1), (a_2, y_2)\}$$

Achtung: $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ sind *keine* Strategien! Dies sind Entscheidungen (Spielzüge) an spezifischen Knoten.


A
a1
a2
TS 1
B
TS 2
B
b1
b2
c1
c2
TS 3
A
TS 4
A
x1
x2
y1
y2
(·)
(·)
(·)
(·)
(·)
(·)

Spieler B**:** In diesem Spielbaum kann Spieler B die erste Entscheidung des A beobachten. Seine Strategiemenge ist nun:

$$S_B = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_2)\}$$

Spieler A hat unverändert die Strategiemenge

$$S_A = \{(a_1, x_1), (a_1, x_2), (a_2, y_1), (a_2, y_2)\}$$

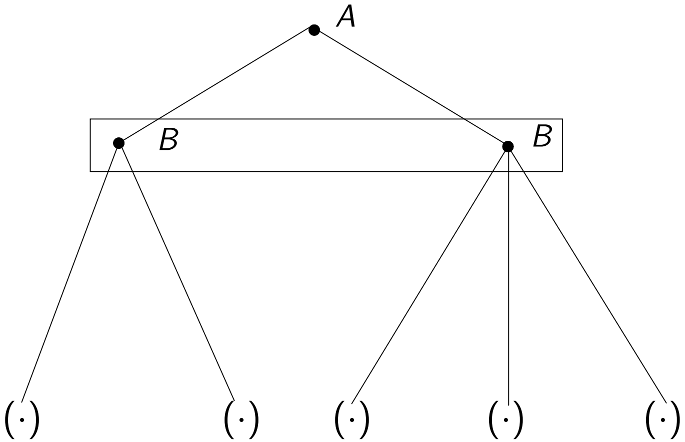
Dieses Spiel verfügt über **vier Teilspiele** TS 1 – TS 4, da es (außer dem Anfangsknoten) vier Knoten und somit vier Vorgeschichten gibt.

Jeder Spielbaum kann auch in Matrixform dargestellt werden (und umgekehrt).

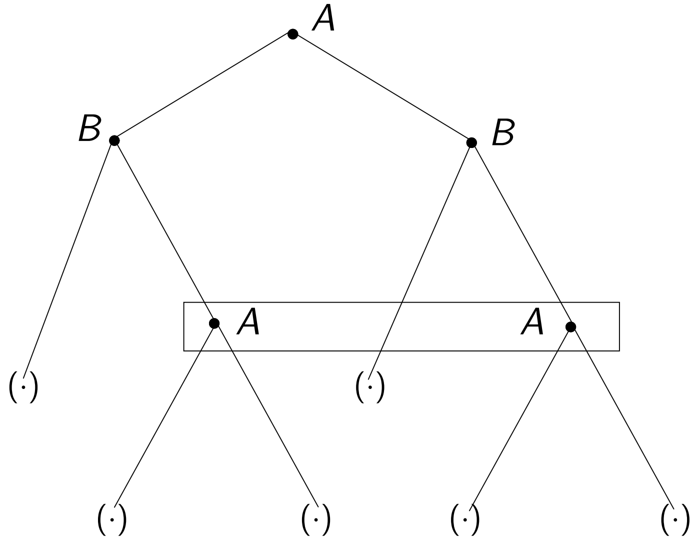
Im vorigen Fall ist dies folgende Matrix (mit entsprechenden Einträgen für die payoffs):

		A			
		(a_1, x_1)	(a_1, x_2)	(a_2, y_1)	(a_2, y_2)
B	(b_1, c_1)				
	(b_1, c_2)				
	(b_2, c_1)				
	(b_2, c_2)				

Ein unzulässiger Spielbaum ($\rightarrow$ Warum?):



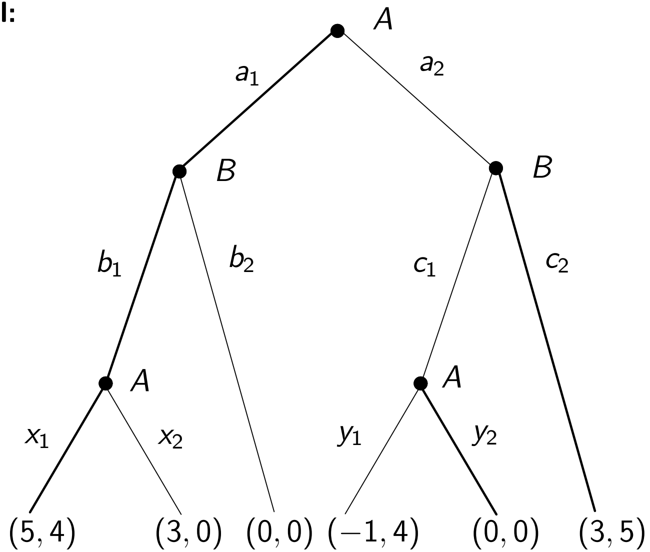
Begrenztes Erinnerungsvermögen von Spieler A:



Lösung eines Spiels in extensiver Form durch **Rückwärtsinduktion**:

- Die Rückwärtsindutkion beginnt bei dem letzten Entscheidungsknoten in jedem Spielverlauf.
- Der entrsprechende Spieler i wird dort jeweils eine rationale Entscheidung treffen, d.h. seine Strategie wird vorsehen, an jedem Knoten die Alternative mit der höchsten Auszahlung zu wählen.
- Diese rationalen Entscheidungen von i kann der Spieler j, der vorher am Zug ist, antizipieren. Er trifft seinerseits eine rationale Entscheidung, die auf der gleichgewichtigen Erwartung bezüglich der Entscheidung von i beruht.
- Diese rationale Entscheidung von j kann wiederum derjenige Spieler antizipieren, der vorher am Zug ist.
- usw. usw. bis zum Anfangsknoten.

Beispiel:



- *Letzte Knoten* (Spieler A):

  A entscheided sich für x_1 (weil $5 > 3$) und für y_2 (weil $0 > -1$).

- *Vorletzte Knoten* (Spieler B):

  Weil B diese Entscheidungen antizipieren kann, entscheided er sich für b_1 (weil $4 > 0$) und für c_2 (weil $5 > 0$).

- *Erster Knoten* (Spieler A):

  Weil A wiederum diese Entscheidungen antizipieren kann, entscheided er sich für a_1 (weil $5 > 3$).

- *Lösung*: $((a_1, x_1), (b_1, c_2))$.

Dasselbe Spiel kann auch in Matrixform analysiert werden:

		A			
		(a_1, x_1)	(a_1, x_2)	(a_2, y_1)	(a_2, y_2)
B	(b_1, c_1)	**(4,5)**	(0,3)	(4,-1)	(0,0)
	(b_1, c_2)	**(4,5)**	(0,3)	(5,3)	(5,3)
	(b_2, c_1)	(0,0)	**(0,0)**	(4,-1)	(0,0)
	(b_2, c_2)	(0,0)	(0,0)	**(5,3)**	**(5,3)**

In der Matrix-Darstellung finden sich neben $((a_1, x_1), (b_1, c_2))$ noch vier weitere *Nash-Gleichgewichte*: $((a_1, x_1), (b_1, c_1))$, $((a_2, y_1), (b_2, c_2))$, $((a_2, y_2), (b_2, c_2))$ und $((a_1, x2), (b_2, c_1))$!

Auch diese Strategiekombinationen sind gleichgewichtig im Sinne der Nash-Lösung, wurden aber durch die Rückwärtsindukrion nicht als Gleichgewichte identifiziert. Wie kommt das?

Dies führt zu dem Konzept der *Teilspielperfektheit*, welches 1965 von Reinhard Selten entwickelt wurde.

Definition: Eine Strategiekombination (s_i^*, s_{-i}^*) ist eine **teilspielperfekte** Nash-Lösung (oder kurz: teilspielperfekt), wenn sie im Gesamtspiel *und* in *allen* Teilspielen ein Nash-Gleichgewicht darstellt.

- Teilspielperfektheit ist somit ein strengeres Kriterium als das Nash-Gleichgewicht, welche die Gleichgewichtseigenschaft lediglich für das Gesamtspiel fordert.
- Teilspielperfektheit erfordert gleichgewichtige (rationale) Entscheidungen in allen Teilspielen, also auch in solchen, die letztlich gar nicht realisiert werden!

Begründung des Kriteriums:

Die Lösung und somit der Verlauf des Spiels darf nicht davon abhängen, dass Spieler für einige Teilspiele **unglaubwürdige** Entscheidungen ankündigen. Rationale Spieler können antizipieren, dass unglaubwürdige (ungleichgewichtige, nicht-rationale) Entscheidungen im Ernstfall nicht realisiert würden.

Daher ist Teilspielperfektheit eine Implikation der Rationalitätsannahme.

Im vorliegenden Fall sind vier Gleichgewichte nicht teilspielperfekt:

- $((a_1, x_1), (b_1, c_1))$: Das Vorhaben von Spieler B, im rechten Knoten c_1 zu spielen, ist unglaubwürdig.
- $((a_2, y_1), (b_2, c_2))$: Sowohl das Vorhaben von A, y_1 zu spielen, als auch die Ankündigung von B, im linken Knoten b_2 zu spielen, sind unglaubwürdig. Spieler As Entscheidung für a_2 beruht ja auf der abschreckenden Ankündigung, b_2 zu spielen.
- $((a_2, y_2), (b_2, c_2))$: siehe oben.
- $((a_1, x_2), (b_2, c_1))$: Sowohl b_2 als auch x_2 sind unglaubwürdige Ankündigungen.

Satz: Durch Rückwärtsinduktion ermittelte Nash-Gleichgewichte sind stets teilspielperfekt.

Begründung: Bei der Rückwärtsinduktion werden sukzessive an jedem Knoten die besten Antworten ermittelt. Daher werden nur Strategien betrachtet, die an jedem Knoten und somit in jedem Teilspiel eine gleichgewichtige Entscheidung vorgeben.

6. Dynamische Spiele: Ökonomische Anwendungen

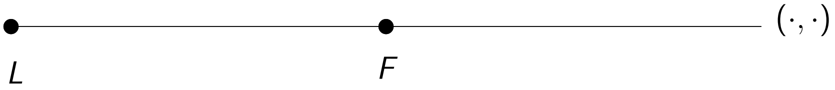
Gliederung:

In Märkten kann es dazu kommen, dass sich ein Unternehmen einseitig an die Strategiewahl eines anderen Unternehmens anpasst.

- Stackelberg-Führer – Stackelberg-Folger
- Leader – Follower
- Unternehmen in Unabhängigkeitsposition – Unternehmen in Abhängigkeitsposition

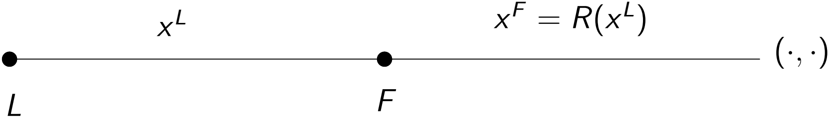
Dies lässt sich als „dynamisches" Spiel interpretieren: Der Stackelberg-Führer wählt zuerst seine Strategievariable, anschließend wählt der Stackelberg-Folger seine Strategievariable.

Sowohl Mengen, als auch Preise sind *stetige* Strategievariablen. In einem Spielbaum repräsentiert daher *ein* Spielzug das ganze *Kontinuum* möglicher Alternativen:



Cournot-Stackelberg-Szenario:

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$.
- Homogene Güter; Menge $x_i \in \mathbb{R}_0^+$ als Strategievariable.
- Der Follower wird die beste Antwort $x_i = R_i(x_j)$ auf die Mengensetzung des Leaders geben.
- Diese beste Antwort antizipiert der Leader (Rückwärtsinduktion!) und wählt seine optimale Menge.



6. Dynamische Spiele: Ökonomische Anwendungen

6.1 Stackelberg-Duopol

Es gelten dieselben Annahmen wie beim Cournot-Spiel.
Angenommen, Unternehmen 2 sei der Follower.

Die beste Antwort des Followers ist gegeben durch

$$x_2 = R_2(x_1) = \frac{a - c - x_1}{2}$$

Diese kann der Leader antizipieren, d.h. er maximiert seine Zielfunktion in Erwartung der besten Antwort von Unternehmen 2:

$$\begin{aligned}
G_1(x_1) &= p(x)x_1 - cx_1 \\
&= (a - x_1 - R_2(x_1))x_1 - cx_1 \\
&= \left(a - c - x_1 - \left(\frac{a - c - x_1}{2}\right)\right) x_1 \\
&= \left(\frac{a - c - x_1}{2}\right) x_1 = \frac{1}{2}(ax_1 - x_1^2 - cx_1)
\end{aligned}$$

Maximierung ergibt

$$\frac{dG_1}{dx_1} = \frac{1}{2}(a - c - 2x_1) = 0 \quad \text{(BEO)}$$
$$\Rightarrow \quad x_1^L = \frac{a-c}{2}$$

Die beste Antwort des Followers ist dementsprechend:

$$x_2^F = R_2(x_1^L) = \frac{a - c - (a-c)/2}{2} = \frac{a-c}{4}$$

Die Cournot-Stackelberg-Lösung ist dann

$$\left(\left(\frac{a-c}{2}\right), \left(\frac{a-c}{4}\right)\right)$$

Einsetzen von x_1^L, x_2^F in die jeweiligen Gewinnfunktionen ergibt:

$$G_1^L = \frac{(a-c)^2}{8} \qquad G_2^F = \frac{(a-c)^2}{16}$$

Der Gewinn in der Cournot-Lösung beträgt $G_i^C = (a-c)^2/9$, so dass gilt:

$$G_2^F < G_1^C = G_2^C < G_1^L$$

Der Leader gewinnt, der Follower verliert gegenüber dem Cournot-Szenario mit simultanen Spielzügen.

- Im Modell wird durch die Spielregeln festgelegt, welches Unternehmen in der Leader- und welches in der Follower-Position ist. In der „Realität“ ist dies jedoch keineswegs klar.
- **Bowley-Szenario:** Beide Unternehmen streben eine Leader-Position an.
- Die Gewinne im Bowley-Szenario sind dementsprechend:

$$
\begin{aligned}
G_i &= \left(a - c - \frac{(a-c)}{2} - \frac{(a-c)}{2}\right)\frac{(a-c)}{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- *Achtung:* Der Nullgewinn ist eine Folge der speziellen Annahmen (Symmetrie, lineare Kostenfunktion, keine Fixkosten,...).

Spiel um den Typ von Marktspiel:

Die Matrix mit den jeweiligen Gewinnen für jeden Typ von Marktspiel zeigt, dass nur eine Koordination auf eine Stackelberg-Lösung gleichgewichtig ist.

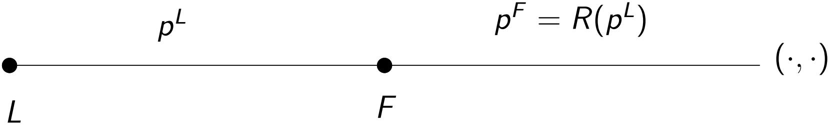
		A: Leader	A: Follower
B	Leader	$(0, 0)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{8}, \frac{(a-c)^2}{16}\right)$
	Follower	$\left(\frac{(a-c)^2}{16}, \frac{(a-c)^2}{8}\right)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{9}, \frac{(a-c)^2}{9}\right)$

(Leader,Leader) entspricht Bowley-Szenario,

(Follower,Follower) entspricht dem Counot-Spiel.

Bertrand-Stackelberg-Szenario:

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$.
- Heterogene Güter; Preise $p_i \in \mathbb{R}_0^+$ als Strategievariable.
- Der Follower wird die beste Antwort $p_i = R_i(p_j)$ auf die Preissetzung des Leaders geben.
- Diese beste Antwort antizipiert der Leader (Rückwärtsinduktion!) und wählt seinen optimalen Preis.



Es gelten dieselben Annahmen wie beim Bertrand-Spiel.
Angenommen, Unternehmen 2 sei der Follower.

Einsetzen der Reaktionsfunktion $p_2 = R_2(p_1) = \frac{1}{2}(a + c + bp_1)$ in die Gewinnfunktion des Leaders ergibt:

$$\begin{aligned} G_1(p_1) &= (a - p_1 + bR_2(p_1))(p_1 - c) \\ &= \frac{1}{2}(2a - 2p_1 + bc + ba + b^2 p_1)(p_1 - c) \end{aligned}$$

Maximierung ergibt

$$\frac{dG_1}{dp_1} = a - 2p_1 + c + \frac{1}{2}b(c + a + 2bp_1 - cb) = 0 \quad \text{(BEO)}$$

$$\Rightarrow \quad p_1^L = \frac{2c - cb^2 + 2a + bc + ba}{2(2 - b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad p_2^F = R_2(p_1^L) = \frac{4c - cb^2 + 4a - ab^2 + 2bc - cb^3 + 2ba}{4(2 - b^2)}$$

Einsetzen von p_1^L, p_2^F in die jeweiligen Gewinnfunktionen ergibt, dass sich **beide** Unternehmen im Vergleich zum Bertrand-Spiel mit simultaner Preissetzung besserstellen:

$$G_1^B = G_2^B < G_1^L < G_2^F$$

Im Unterschied zum Cournot-Stackelberg-Szenario profitieren beide von der sequenziellen Strategiewahl, und der Follower profitiert stärker als der Leader!

Während im Cournot-Stackelberg-Fall beide Unternehmen bestrebt sind, durch möglichst rasche Mengensetzungen in die Leader-Position zu gelangen, ist es beim Preiswettbewerb das Bestreben, die Preissetzung des Konkurrenten abzuwarten. Die jeweilige Lösung dieser Koordinationsprobleme kann in den vorliegenden Spielmodellen nicht untersucht werden.

Das Spiel modelliert in sehr stilisierter Weise das Verhalten von Gewerkschaften und Arbeitgebern in einer sequenziellen Struktur:

- Die *Gewerkschaften* verfügen annahmegemäß über die Macht, den Nominallohnsatz w feszulegen (Monopol), d.h. ihre Strategievariable ist $w \in \mathbb{R}^+$. Die *Arbeitgeber* müssen die Nominallohnsetzung hinnehmen und passen anschließend die Beschäftigung L an. Ihre Strategievariable ist also $L \in \mathbb{R}^+$.
- Die Zielfunktion der Gewerkschaften sei die Lohnsumme:
$$\max_{w} u(w, L) = wL$$
- Die Zielfunktion der Arbeitgeber ist der Gewinn:
$$\max_{L} G(w, L) = pF(L) - wL$$
mit $F(\cdot)$ als Produktionsfunktion und p als dem Preisniveau. Offenbar verhalten sich die Unternehmen als Mengenanpasser (vollkommene Konkurrenz).

- Die Arbeitgeber entscheiden *nach* der Lohnfestsetzung. Ihre beste Antwort ist gegeben durch:

$$\frac{\partial G}{\partial L} = pF^{'}(L) - w = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{'}(L) = \frac{w}{p}$$

$$L^*(w) = (F^{'})^{-1}\left(\frac{w}{p}\right) \quad \text{(Reaktionsfunktion)}$$

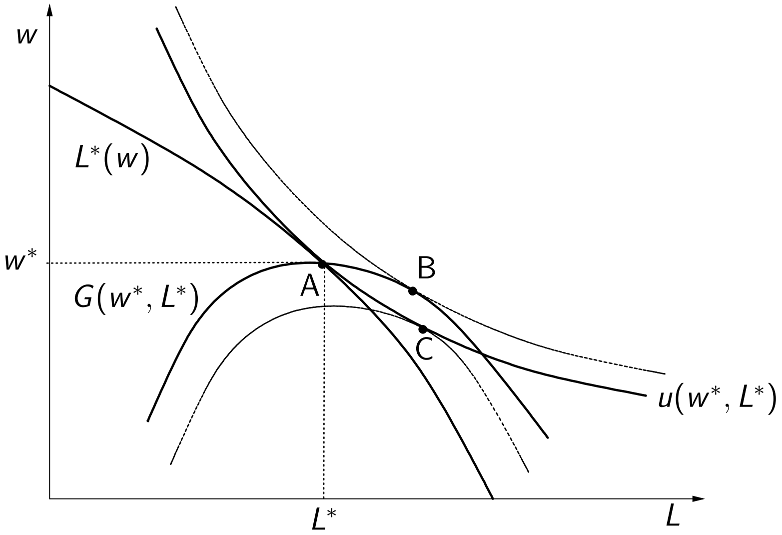
Es sei angenommen, dass $L^*(w)$ eine konkave Funktion ist.

- Entsprechend der Rückwärtsinduktion antizipieren die Gewerkschaften diese beste Antwort und maximieren in ihrem ersten Spielzug

$$\max_{w} u(w, L) = wL \quad \text{unter der NB} \quad L = L^*(w)$$

Da $L^*(w)$ als konkav angenommen wurde und wL konvex ist, muss die Lösung ein Tangentialpunkt beider Funktionen sein.

Grafische Lösung:



Bemerkungen:

- Die teilspielperfekte Lösung (u^*, L^*) liegt im Punkt A. In der Grafik sind auch die Isogewinnlinien des Unternehmens eingezeichnet.
- Da im Punkt A die Isogewinnlinie der Arbeitgeber und die Isonutzenlinie der Gewerkschaften eine Linse bilden, ist die Lösung pareto-inferior. Im Punkt B könnten sich die Gewerkschaften bei gleichbleibendem Gewinn der Unternehmen besser stellen. Im Punkt C könnten die Unternehmen bei gleichbleibendem Nutzen der Gewerkschaften einen höheren Gewinn erzielen. Diese Strategiekombinationen stellen jedoch keine teilspielperfekten Nash-Lösungen dar.
- Literatur: Berninghaus/Erhart/Güth (2002), S.139 ff.

Das folgende Modell geht zurück auf

- Barro, R.J., Gordon, D.B. (1983), A positive theory of monetary policy in a natural rate model. *Journal of Political Economy* 91(4), 589-610.

Im Mittelpunkt steht das Problem, dass eine Zentralbank, die mit ihrer Geldpolitik eine gesamtwirtschaftliche Wohlfahrtsfunktion maximieren will, nicht glaubwürdig das Null-Inflationsziel verfolgen kann, obwohl Null-Inflaion wohlfahrtsoptimal wäre. Da die Privatwirtschaft dies antizipieren kann und entsprechende Inflationserwartungen bildet, ist das Ergebnis suboptimal (inferior). Die vorgeschlagene Lösung besteht darin, dem Nullinflationsziel Glaubwürdigkeit zu verschaffen, indem die Zentralbankpolitik daran gebunden wird (Regelbindung).

Nobelpreis 2004 an Finn E. Kydland und Edward C. Prescott.

Spieler 1: Die Privatwirtschaft

- *Strategievariable:* Die Privatwirtschaft legt das Nominallohnniveau aufgrund der zugrunde liegenden Inflationserwartungen fest. Als "strategische" Variable gelten hier die Inflationserwartungen π^e.
- *Auszahlungsfunktion:* Die Privatwirtschaft ist bestrebt, einen gleichgewichtigen Reallohn zu erhalten. Das setzt voraus, dass die Inflation möglichst korrekt eingeschätzt wird. Jede Abweichung der Inflationserwartung von der tatsächlichen Inflationsrate π negativ in die Zielfunktion ein:

$$u_W = -(\pi - \pi^e)^2.$$

Offenbar ist die Privatwirtschaft bestrebt, rationale Erwartungen ($\pi^e = \pi$) zu bilden.

Spieler 2: Die Zentralbank

- *Strategievariable:* Die Zentralbank legt die Geldmenge fest, von der angenommen wird, dass diese unmittelbar die Inflationsrate determiniert. Als strategische Variable fungiert somit die tatsächliche Inflationsrate π.
- *Auszahlungsfunktion:* Die Zentralbank will einerseits eine möglichst geringe Inflation (bzw. Deflation), d.h. die (quadrierte) Abweichung vom Ziel $\pi = 0$ geht negativ in die Zielfunktion ein. Andererseits ist die Zentralbank in gewissem Maß an einer niedrigen Arbeitslosenquote A interessiert. Ihre Zielfunktion lautet somit:

$$u_Z = -\pi^2 - \lambda A^2,$$

  wobei $\lambda > 0$ ein Gewichtungsparameter für das Beschäftigungsziel ist.

Die Volkswirtschaft werde durch eine modifizierte *Phillips-Kurve* charakterisiert, also einem trade-off zwischen Inflationsrate π und Arbeitslosenquote A:

$$A = A_n - (\pi - \pi^e)$$

mit A_n als der “natürlichen Arbeitslosenquote“. Die Lage der linearen Phillips-Kurve wird durch die Inflationserwartungs π^e parametrisiert: Je höher π^e, desto weiter rechts verläuft die Funktion. Bei rationalen Erwartungen lautet die Phillips-Kurve $A = A_n$, d.h. es gibt dann keinen trade-off zwischen π und A.

Einsetzen der Phillips-Kuve in die Zielfunktion der Zentralbank ergibt:

$$u_Z = -\pi^2 - \lambda(A_n - (\pi - \pi^e))^2.$$

Man erkennt sofort, dass der höchstmögliche Zielwert, der unter rationalen Erwartungen $\pi^e = \pi$ erreicht werden kann, bei $\pi^e = \pi = 0$ (Nullinflation) erreicht wird.

Sequenzielle Spielstruktur:

- Erst werden die Inflationserwartungen gebildet und die entsprechenden Nominallöhne festgelegt. Die Löhne seien dann fixiert.
- Anschließend legt die Zentralbank die Geldmenge und somit die Inflationsrate fest.

Grundproblem:

- Weil die Zentralbank das höchstmögliche Nutzenniveau bei rationalen Erwartungen erreichen kann, wenn die tatsächliche und die erwartete Inflationsrate Null sind, erscheint es plausibel, wenn sie eine Nullinflations-Politik ankündigt.
- Es ist jedoch leicht einzusehen, dass sie dann für den Fall, dass die Privatwirtschaft dieses Inflationsziel tatsächlich glaubt ($\pi^e = 0$), einen Anreiz hat, von der Ankündigung abzuweichen, sich also *zeitinkonsistent* zu verhalten!

Das Maximierungsproblem der Zentralbank ergibt:

$$\frac{du_Z}{d\pi} = -2\pi + 2\lambda(A_n - \pi + \pi^e) = 0 \quad \text{(BEO)}$$
$$\Rightarrow \quad \pi^* = \frac{\lambda}{1+\lambda}(A_n + \pi^e) = R_Z(\pi^e).$$

Dies ist die *Reaktionsfunktion* der Zentralbank. Man erkennt, dass im Fall von $\pi^e = 0$ die optimale Inflationspolitik $\pi = A_n\lambda/(1+\lambda) > 0$ ist und eben nicht die Nullinflation. Wegen $\lambda > 0$ ist die Steigung der Reaktionsfunktion kleiner als Eins.

Die Lösung des Maximierungsproblems der Privatwirtschaft ist offenbar

$$\pi^e = \pi.$$

Da die Entscheidungen sequenziell sind, wird die Privatwirtschaft die optimale Reaktion der Zentralbank auf die Inflationserwartung korrekt antizipieren und sich nicht täuschen lassen. Einsetzen der Reaktionsfunktion der Zentralbank in $\pi^e = \pi^*$ und Auflösen nach π^e ergibt dann die gleichgewichtige Inflationserwartung

$$\pi^e = \lambda A_n.$$

Die beste Antwort der Zentralbank ist dem entsprechend

$$\pi = \frac{\lambda}{1+\lambda}(A_n + \lambda A_n) = \lambda A_n.$$

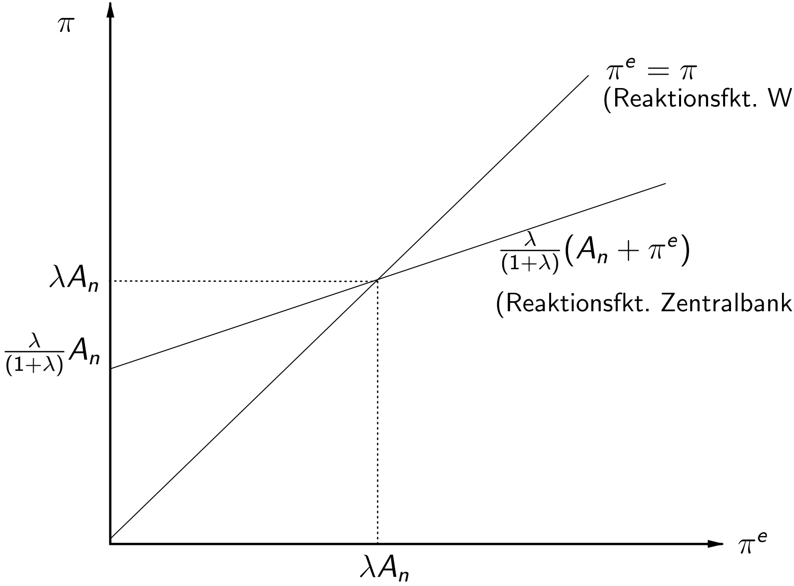
Die teilspielperfekte (zeitkonsistente) Lösung ist also nicht die Nullinflationspolitik!

- Beide Reaktionsfunktionen sind in folgender Abbildung dargestellt. Eine *zeitkonsistente* Geldpolitik beinhaltet somit die Ankndigung einer positiven Inflationsrate $\pi = \lambda A_n$. Diese – und nur diese – wird dann im Spielverlauf auch realisiert. Daher ist $\pi^e = \pi = \lambda A_n$ das teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht.
- Die Auszahlung, die sich dabei für die Zentralbank ergibt, ist

$$u_Z^* = -\lambda(1+\lambda)A_n^2$$

- Eine *regelgebundene* Geldpolitik, bei der die Zentralbank auf $\pi = 0$ verpflichtet wird, und bei der infolgedessen auch die Inflationserwartung $\pi^e = 0$ rational ist, führt hingegen zu

$$u_Z^{**} = -\lambda A_n^2 > u_Z^*$$



π
$\pi^e = \pi$
(Reaktionsfkt. Wirtschaft)
$\frac{\lambda}{(1+\lambda)}(A_n + \pi^e)$
(Reaktionsfkt. Zentralbank)
λA_n
$\frac{\lambda}{(1+\lambda)}A_n$
π^e
λA_n

7. Wiederholte Spiele

Gliederung:

Begriffe:

- Ein Spiel in Normalform G wird T mal hintereinander gespielt.
- Das Spiel G heißt hier *Basisspiel* oder *Stufenspiel*.
- Das *Gesamtspiel*, also das T-fach wiederholte Basisspiel, wird mit G^T oder auch mit $G(T)$ bezeichnet.
- *Achtung:* Das auf einer Spielstufe t $(1 \leq t \leq T)$ durchgeführte Basisspiel G oder die Spielstufe t selbst sind <u>keine</u> Teilspiele! Allerdings beginnen auf jeder Spielstufe neue Teilspiele. Hat das Basisspiel z.B. 9 mögliche Spielausgänge, dann beginnen auf der Stufe $t = 2$ entsprechend 9 Teilspiele, auf $t = 3$ beginnen 81 Teilspiele usw.

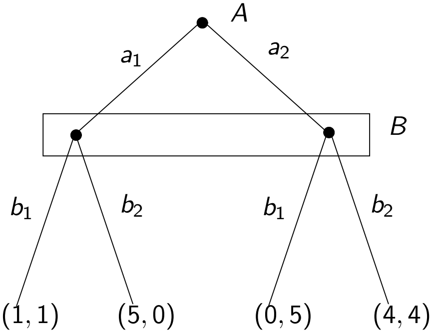
Zum Begriff der Strategie in einem wiederholten Spiel:

- Bei einem Basisspiel $G = \{S_1, ..., S_n, u_1, ..., u_n\}$ repräsentiert $s_i \in S_i$ eine Strategie des Spielers i.
- In einem wiederholten Spiel (Gesamtspiel) repräsentiert $s_i \in S_i$ jedoch nur einen *Spielzug* auf einer Spielstufe! Man sollte also in Bezug auf $G(T)$ von s_i nur als Spielzug und nicht von Strategie sprechen.
- Für $G(T)$ muss der Strategieraum S_i^T und die entsprechenden Strategien = Verhaltenspläne für das Gesamtspiel bestimmt werden.

- Für das Basisspiel G sind die Auszahlungen $u_1, ..., u_n$ definiert.
- Für das Gesamtspiel $G(T)$ ergeben sich die Auszahlungen durch *Aufsummieren* der Auszahlungen auf den einzelnen Spielstufen.
- Da das Spiel endlich oft wiederholt wird, *kann* auf eine Abdiskontierung von in der Zukunft liegenden Auszahlungen verzichtet werden (möglich ist das aber schon).

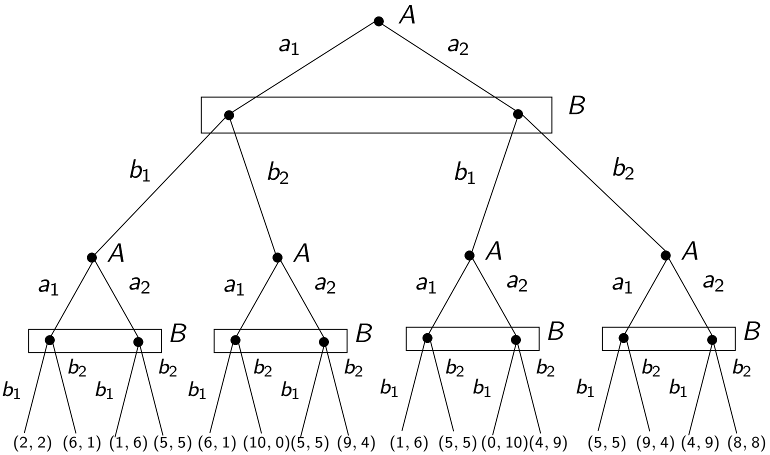
Beispiel für ein Basisspiel G:

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(1,1)	(5,0)
	a_2	(0,5)	(4,4)



- Dieses Basispiel werde einmal wiederholt, d.h. das Gesamtspiel ist $G(2)$.
- Entsprechend der vier möglichen Spielausgänge am Ende der ersten Stufe gibt es 4 Teilspiele, die auf der zweiten Stufe beginnen. Da die zweite auch die letzte Spielstufe ist, gibt es daher im Gesamtspiel 4 Teilspiele und 16 mögliche Spielausgänge.
- Jedes Teilspiel auf der zweiten = letzten Stufe ist wiederum das Basisspiel G.
- Die Auszahlungen am Ende der 16 möglichen Spielausgänge ergeben sich durch Addition der jeweiligen Auszahlungen auf der ersten und zweiten Stufe.

- Die Auszahlungen bei den vier Teilspielen ergeben sich durch die Auszahlungen des Basisspiel *plus* die aus der Vorgeschichte resultierenden Auszahlungen.
- Dadurch bleibt für jeden Spieler die *Struktur* seiner Auszahlungen in jedem Teilspiel dieselbe wie im Basisspiel!
- Daraus folgt, dass in allen Teilspielen der letzten Spielstufe eine Nash-Lösung des Basisspiels gespielt werden muss.


A
a1
a2
B
b1
b2
b1
b2
A
A
A
A
a1
a2
a1
a2
a1
a2
a1
a2
B
B
B
B
b1
b2
b1
b2
(2, 2) (6, 1) (1, 6) (5, 5) (6, 1) (10, 0) (5, 5) (9, 4) (1, 6) (5, 5) (0, 10) (4, 9) (5, 5) (9, 4) (4, 9) (8, 8)

Die Auszahlungsmatrizen der vier Teilspiele (von links nach rechts):

TS 1		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(2,2)	(6,1)
	a_2	(1,6)	(5,5)

TS 2		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(6,1)	(10,0)
	a_2	(5,5)	(9,4)

TS 3		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(1,6)	(5,5)
	a_2	(0,10)	(4,9)

TS 4		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(5,5)	(9,4)
	a_2	(4,9)	(8,8)

Das Basisspiel und somit auch alle Teilspiele haben die Nash-Lösung (a_1, b_1).

Durch Rückwärtsinduktion kann nun jeder Spieler auf der ersten Stufe antizipieren, dass in *allen* auf der zweiten Stufe beginnenden Teilspiele (a_1, b_1) gespielt werden wird, d.h. auf der zweiten Stufe die Auszahlungen $(1, 1)$ hinzukommen werden.

Da für alle möglichen vier Spielausgänge der ersten Stufe die antizipierten Auszahlungen $(1, 1)$ hinzugerechnet werden, hat auch auf der ersten Stufe das Spiel dieselbe Struktur wie das Basisspiel. Folglich werden auch der ersten Stufe die Spielzüge (a_1, b_1) gewählt.

Die teilspielperfekte Lösung ist hier $((a_1, a_1, a_1), (b_1, b_1, b_1))$. (Eine Strategie ist hier ein (1×3)-Vektor, weil jeder Spieler nach dem Spielzug der ersten Stufe nur noch in zwei mögliche Teilspiele geraten kann, für die die Strategie Spielzüge vorschlagen muss.)

Wichtige Aussagen:

- Gegeben sei das wiederholte Spiel $G(T)$. Auf der Stufe $t+1 \leq T$ beginnen Teilspiele, bei denen jeweils das Basisspiel noch $(T-t)$-mal gespielt wird. D.h. das auf der Stufe $t+1$ beginnende Teilspiel ist definiert durch $G(T-t)$.
- Die Teilspiele der letzten Stufe entsprechen dem Basisspiel.

Satz: Hat das Basisspiel G eine *eindeutige* Nash-Lösung (s_i^*, s_{-i}^*), dann ist in einem *endlich* oft wiederholten Spiel $G(T)$ die einzige teilspielperfekte Lösung diejenige, bei der auf allen Stufen stets (s_i^*, s_{-i}^*) gespielt wird.

Interessant sind wiederholte Spiele, bei denen das Basisspiel *multiple* Nash-Gleichgewicht aufweist.

Beispiel für G:

		A		
		L	M	R
B	L	**(1,1)**	(5,0)	(0,0)
	M	(0,5)	(4,4)	(0,0)
	R	(0,0)	(0,0)	**(3,3)**

- Das Spiel werde einmal wiederholt, das Gesamtspiel ist $G(2)$.
- Es gibt 9 Teilspiele, die jeweils identisch mit G sind.
- Da ein Spieler nach einem Spielzug der ersten Stufe in 3 Teilspiele auf der zweiten Stufe gelangen kann, ist eine Strategie ein (1×4)-Vektor, z.B. (L, L, L, L), (L, L, M, R), ... Oft lassen sich Strategien für $G(T)$ auch einfacher formulieren (siehe nachstehendes Beispiel).

Betrachte folgende Strategie (für A und B):

> *„Spiele auf der ersten Stufe M. Falls auf der ersten Stufe (M, M) realisiert wurde, spiele auf der zweiten Stufe R und ansonsten L."*

Diese Formulierung ist ein vollständiger Verhaltensplan: Neben der Anweisung für die erste Stufe wird für dasjenige Teilspiel, dessen Vorgeschichte (M, M) ist, der Spielzug R vorgegeben. Für alle anderen 8 Teilspiele (in deren Vorgeschichte *nicht* (M, M) gespielt wurde), wird hingegen L vorgegeben.

Ist diese Strategiekombinatiuon teilspielperfekt?

Der Strategievorschlag muss in *allen* Teilspielen ein Nash-Gleichgewicht darstellen. In einem Teilspiel wird (R, R) vorgeschlagen, in den anderen acht Teilspielen wird (L, L) vorgeschlagen. Beides sind Nash-Gleichgewichte des Basisspiels!

Es bleibt die Frage zu klären, ob für mindestens einen Spieler ein Anreiz besteht, von dem Vorschlag abzuweichen, auf der *ersten* Stufe mit M zu beginnen. Als Alternative zu einer Rückwärtsinduktion in dem (hier sehr aufwändigen) Spielbaum kann die Strategiekombination in einem sog. *One-Shot-Game* analysiert werden.

One-Shot-Game für $G(2)$:

Bei einem OSG werden die Auszahlungen der zweiten Stufe, wie sie sich durch Anwendung der Strategieempfehlung ergeben, zu den möglichen Auszahlungen der ersten Stufe addiert.

Hier: Im Teilspiel mit der Vorgeschichte (M, M) wird auf der zweiten Stufe (R, R) gespielt. Also wird die Auszahlung der zweiten Stufe $(3, 3)$ zu der Auszahlung für (M, M) der ersten Stufe addiert. In allen anderen Teilspielen mit einer anderen Vorgeschichte wird auf der zweiten Stufe (L, L) mit der Auszahlung $(1, 1)$ vorgeschlagen. Diese wird zu den Auszahlungen aller anderen Spielzugkombinationen (außer (M, M)) der ersten Stufen addiert.

Das Resultat ist eine kompakte Darstellung der Entscheidungssituation der Spieler vor Beginn der ersten Stufe, wenn sie ihr gleichgewichtiges Verhalten auf der zweiten Stufe (entsporechend des Strategievorschlags) bereits antizipieren.

One-Shot-Game:

		A		
		L	M	R
B	L	**(2,2)**	(6,1)	(1,1)
	M	(1,6)	**(7,7)**	(1,1)
	R	(1,1)	(1,1)	**(4,4)**

- Da für die neun Teilspiele jeweils unterschiedliche Strategien vorgeschlagen wurden, entspricht die Struktur der Auszahlungen im OSG nicht mehr der Auszahlungsstruktur des Basisspiels!
- Im OSG stellt (M, M) nun ein Nash-Gleichgewicht dar! (Dass (R, R) und (L, L) hier ebenfalls Nash-Gleichgewichte darstellen, ist hier ohne Belang.)

  $\Rightarrow$ Das bedeutet, dass die Spieler auch auf der ersten Stufe keinen Anreiz haben, von der vorgeschlagenen Strategie abzuweichen. Die Strategiekombination ist teilspielperfekt.
- Zu beachten ist, dass auf der ersten Stufe des *Gesamtspiels* die Spielzüge (nicht Strategien!) (M, M) gespielt werden, obwohl (M, M) im *Basisspiel* kein Nash-Gleichgewicht ist.

Falls die Strategien für die zweite Stufe etwas anderes als (R, R) oder (L, L) vorschlagen, so kann man zwar für diese Strategien ein entsprechendes One-Shot-Game aufstrellen. Allerdings ist dann von vornherein klar, dass die Strategiekombination nicht teilspielperfekt sein kann, und von rationalen Spielern somit nicht gewählt werden wird.

Übung: Stellen Sie das One-Shot-Game auf, wenn den Spielern folgende Strategiekombination vorgeschlagen wird: „Spiele auf der ersten Stufe M. Falls auf der ersten Stufe (M, M) realisiert wurde, spiele auf der zweiten Stufe L und ansonsten R.“ (Offenbar werden hier für alle Teilspiele Nash-Gleichgewichte vorgeschlagen.)

Satz: Wenn es in einem Basisspiel G multiple Nash-Gleichgewichte gibt, dann existieren teilspielperfekte Lösungen für $G(T)$, bei denen auf Spielstufen $t < T$ Spielzüge gewählt werden, die im Basisspiel kein Nash-Gleichgewicht darstellen.

- Bei unendlich oft wiederholten Spielen ist das reine Aufsummieren der Auszahlungen einzelner Spielstufen sinnlos. Zukünftige Auszahlungen werden daher abdiskontiert.
- Sei u_t die Auszahlung, die ein Spieler auf der Stufe t erhält. Für einen bestimmten Spielverlauf ist dann die Auszahlung für den Spieler gegeben durch:

$$V = u_1 + \delta u_2 + \delta^2 u_3 + ... = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t$$

  mit $\delta = 1/(1+r)$ als Diskontfaktor (und r als Zinssatz) und V als **Gegenwartswert** oder Barwert der Auszahlungsreihe. Es sei $r \geq 0$ und somit $\delta \in [0, 1]$.
- Ein unendlich oft wiederholtes Spiel ist gegeben durch $G(\infty, \delta)$.

Strategien in u.o.w. Spielen:

- Es gibt unendlich viele Strategien für jeden Spieler
- Strategien müssen daher in sehr allgemeiner Form definiert sein, z.B. „Wenn in der Vorgeschichte stets die Spielzüge (x, y) gespielt wurden, dann spiele auf der nächsten Stufe den Spielzug x, und ansonsten z."

Teilspiele im u.o.w. Spiel:

- Es gibt unendlich viele Teilspiele.
- Alle Teilspiele sind identisch.
- Alle Teilspiele sind identisch mit dem Gesamtspiel $G(\infty, \delta)$.

Spezieller Strategietyp: Triggerstrategie

- Trigger = Auslöser
- Eine Triggerstrategie kündigt ein bestimmtes (in der Regel wechselseitig vorteilhaftes) Verhalten an, solange der andere Spieler sich ebenfalls an seine Ankündigung hält. Weicht der andere von seiner Ankündigung ab („Trigger“) kündigt die Strategie eine *glaubwürdige* Bestrafung an.
- Auf diese Weise können in einem u.o.w. Spiel kooperative Lösungen erzielt werden, die in einem statischen oder lediglich endlich oft wiederholten Spiel kein Nash-Gleichgewicht darstellen.

Beispiel Gefangenendilemma (G):

		A	
		K	D
B	K	(4,4)	(0,5)
	D	(5,0)	(1,1)

Das Spiel werde unendlich oft wiederholt: $G(\infty, \delta)$.

Strategie für beide Spieler: „Beginne auf der ersten Stufe mit K. Falls in der Vorgeschichte stets (K, K) gespielt wurde, dann wähle auch in der nächsten Stufe K, und ansonsten D."

Zu Beginn des Gesamtspiels und eines jeden Teilspiels (identisch!) kann sich jeder Spieler die abdiskontierten Zahlungsströme ausrechnen, die sich ergeben, wenn er sich an den Strategievorschlag hält (also weiter K spielt) oder nicht (also D spielt).

$$V^K = 4 + \delta 4 + \delta^2 4 + \delta^3 4 + \ldots = \left(\frac{1}{1-\delta}\right) 4$$

$$V^D = 5 + \delta 1 + \delta^2 1 + \delta^3 1 + \ldots = 5 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) 1$$

Ein Anreiz, sich an die Strategie zu halten und somit weiterhin K zu spielen, besteht dann, wenn $V^K \geq V^D$. Dies hängt offenbar von δ ab.

Anreiz, sich an die Triggerstrategie zu halten:

$$
\begin{aligned}
V^K &\geq V^D \\
\left(\frac{1}{1-\delta}\right) 4 &\geq 5 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) 1 \\
4 &\geq 5(1-\delta) + \delta 1 = 5 - 4\delta \\
\Rightarrow \quad \delta &\geq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(und somit $r \leq 300\%$)

Interpretation:

- Die Triggerstrategie „bestraft“ eine Abweichung von der Kooperation damit, dass dann nur noch D gespielt wird. Die beste Antwort auf D ist wiederum D. Die Drohung besteht also darin, dass in Zukunft nur noch die „schlechte“ Nash-Lösung des Basisspiels gespielt wird. Das ist glaubwürdig.
- Das Problem besteht darin, dass die Bestrafung erst in der Zukunft wirksam wird, der Defektionsgewinn in Höhe von 5 aber schon heute anfällt. Ist einem Spieler die Zukunft hinreichend wichtig (δ groß bzw. r klein), dann ist für ihn die Drohung mit (D, D) abschreckend. Wer zukünftige Zahlungen sehr stark abdiskontiert (δ klein bzw. r groß), wird sich von der Drohung nicht abschrecken lassen.
- Der Diskontfaktor δ sei gemeinsames Wissen!

Ist die Triggerstrategiekombination für $\delta \geq 1/4$ teilspielperfekt?

Die unendlich vielen Teilspiele lassen sich entsprechend der Formulierung der Strategie in zwei Klassen einteilen:

- Teilspiele, in deren Vorgeschichte stets (K, K) gespielt wurde.
- Alle übrigen Teilspiele

Für die erste Gruppe wird vorgeschlagen, weiterhin (K, K) zu spielen. Dies ist wegen $\delta \geq 1/4$ gleichgewichtig. Für die zweite Gruppe wird vorgeschlagen (D, D) zu spielen. Auch dies ist gleichgewichtig. Folglich besteht in keinem Teilspiel ein Anreiz, vom Strategievorschlag abzuweichen. Für die erste Stufe wird vorgeschlagen mit (K, K) zu beginnen. Auch hier besteht wegen $\delta \geq 1/4$ kein Anreiz abzuweichen. Somit ist die Triggerstrategiekombination teilspielperfekt.

Das Beispiel zeigt, dass selbst in Spielen mit einem einzigen pareto-inferioren Nash-Gleichgewicht eine wechselseitig vorteilhafte (kooperative) Lösung erzielen lässt, wenn das Spiel unendlich oft wiederholt wird und der Diskontfaktor hinreichend groß ist. Unter diesen (speziellen) Bedingungen kann Kooperation auch ohne bindende Verträge erzielt werden.

Das Ergebnis lässt sich generalisieren. Dazu ist der Begriff der **durchschnittlichen Auszahlung** hilfreich:

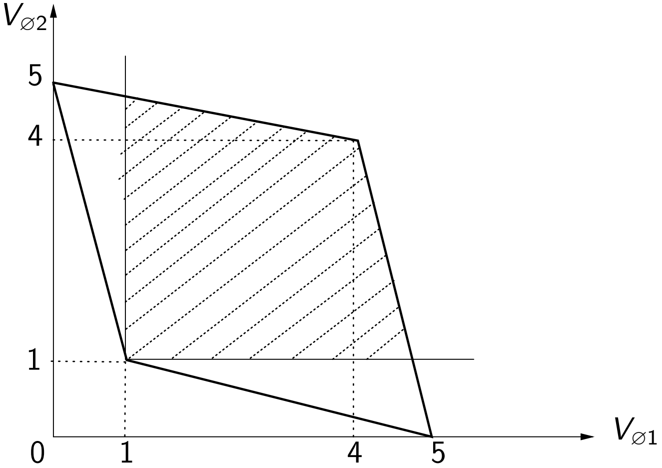
$$V_{\varnothing} = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t = (1-\delta)V$$

Beispiel: Falls stets (K, K) gespielt wird ist die durchschnittliche Auszahlung

$$V_{\varnothing} = (1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta}\right)4 = 4$$

also wie im Basisspiel.

Alle möglichen durchschnittlichen Auszahlungen unendlicher Zahlungsreihen sind dann Linearkombinationen der Zahlungsreihen, bei denen stets (K, K), (D, K), (K, D) oder (D, D) gespielt wird.



$V_{\varnothing 2}$
5
4
1
0
1
4
5
$V_{\varnothing 1}$

Folk-Theorem (Friedman 1971):

Sei G ein Basisspiel mit vollständiger Information und $(u_1^N, ..., u_n^N)$ der Vektor der Auszahlungen für die Spieler $i = 1, ..., n$ im Nash-Gleichgewicht. Falls ein Auszahlungsvektor $(\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_n)$ existiert mit $\tilde{u}_i > u_i^N \; \forall i$ (d.h. die Nash-Lösung ist pareto-inferior) **und** falls der Diskontfaktor δ hinreichend nahe bei 1 liegt, dann existieren teilspielperfekte Lösungen für $G(\infty, \delta)$, welche $(\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_n)$ als durchschnittliche Auszahlung hervorbringen.

Hinweise:

- Die Aussage des Folk-Theorems ist eine Existenzaussage: Es werden Bedingungen formuliert, unter denen (Trigger-) Strategien existieren, mit deren Hilfe sich beide Spieler besser stellen können als bei einer permanenten Wiederholung der Nash-Lösung des Stufenspiels.
- Das Folk-Theorem gilt auch in dem Fall, dass die Nash-Lösung des Basisspiels eindeutig ist.
- Im obigen Beispiel gibt es ein Kontinuum von erreichbaren durchschnittlichen Auszahlungen, die die Auszahlung des Nash-Gleichgewichtes des Basisspiels dominieren. Entsprechend gibt es auch ein Kontinuum von teilspielperfekten Lösungen, mit deren Hilfe beide Spieler zu kooperativen Lösungen kommen können.

8. Wiederholte Spiele: Ökonomische Anwendungen

Gliederung:

Gegeben seien die Annahmen des bereits behandelten *Cournot-Oligopol-Spiels*.

- Die Cournot-Nash-Lösung ist gegeben durch $x_i^C = (a-c)/3$ und die Gewinne sind für beide Unternehmen $G_i^C = (a-c)^2/9$.
- *Kartell:* Beschränkung der Mengen $\rightarrow$ Erzielung eines höheren Preises $\rightarrow$ höherer Gewinn.
- *Optimales Kartell:* Beide Unternehmen verhalten sich zusammen so wie *ein* Monopolist.
- Die Monopolmenge ist gegeben durch $x = (a-c)/2$. Bei symmetrischer Aufteilung ist die optimale Kartellmenge demnach $x_i^K = (a-c)/4$. Der jeweils erzielbare Kartellgewinn ist dann $G_i^K = (a-c)^2/8 > G_i^C$.

Im Fall eines statischen Spiels ist die beste Antwort auf die Kartelleinhaltung des anderen Spielers der Kartellnruch:

$$x_i^{KNE} = R_i(x_j^K) = \frac{a - c - (a-c)/4}{2} = \frac{3(a-c)}{8} \neq x_i^K$$

Der erzielbare Gewinn bei einem einseitigen Kartellburch ist demnach:

$$G_i^{KNE} = \left(a - c - \frac{(a-c)}{4} - \frac{3(a-c)}{8}\right)\frac{3(a-c)}{8} = \frac{4.5(a-c)^2}{32} > G_i^K$$

Da der Kartellbnruch jedoch wechselseitig antizipiert werden kann, stellt das Kartell keine Lösung in einem statischen Spiel dar!

Warum hält das Kartell nicht bei *endlicher* Wiederholung?

- Der Grund liegt in der *Rückwärtsindurktion*: Die Teilspiele, die auf der letzten Stufe beginnen, sind identisch mit dem statischen Cournot-Spiel!
- Die einzige Nash-Lösung dieser Teilspiele der letzten Stufe ist die Cournot-Nash-Lösung (x_1^C, x_2^C).
- Auf der vorletzten Stufe antizipieren die Spieler, dass auf der letzten Stufe unabhängig von ihren Spielzügen auf der vorletzten Stufe stets (x_1^C, x_2^C) gespielt werden wird. Die Auszahlungsstruktur der in $T-1$ beginnenden Teilspiele ist folglich identisch mit der des statischen Cournot-Spiels. Daher ist der einzige gleichgewichtige Spielzug auch hier (x_1^C, x_2^C).
- Dieselbe Überlegung gilt auch auf der Stufe $T-2$ usw. bis zur ersten Spielstufe!
- Erinnerung: Hat G ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht (s_i^*, s_{-i}^*), dann ist in $G(T)$ die permanente Wahl von (s_i^*, s_{-i}^*) die einzige t.s.p. Lösung.

Bei einem u.o.w. Cournot-Spiel kann folgende Triggerstrategie vereinbart werden:

> *„Produziere auf der ersten Stufe die Kartellmenge x_i^K. Falls in der Vorgeschichte auf allen Stufen (x_1^K, x_2^K) produziert wurde, produziere auf der folgenden Stufe x_i^K und die Cournot-Nash-Menge x_i^C sonst."*

Vor jedem Teilspiel (und auch zu Beginn der ersten Stufe) können folgende Zahlungsreihen verglichen werden:

$$V^K = G^K + \delta G^K + \delta^2 G^K + ... = \frac{1}{1-\delta} G^K$$

$$V^{KNE} = G^{KNE} + \delta G^C + \delta^2 G^C + ... = G^{KNE} + \frac{\delta}{1-\delta} G^C$$

Einsetzen der Werte für G^K, G^{KNE} und G^C ergibt

$$\begin{aligned}
V^K &\geq V^{KNE} \\
\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(a-c)^2}{8} &\geq \frac{4.5(a-c)^2}{32} + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\frac{(a-c)^2}{9} \\
\frac{1}{8} &\geq \frac{4.5}{32}(1-\delta) + \frac{1}{9}\delta \\
\delta &\geq \frac{9}{17}
\end{aligned}$$

Die Triggerstrategie ist für $\delta \geq 9/17$ teilspielperfekt.

Das Ergebnis ist unabhängig von den Parametern a und c!

Hinweise:

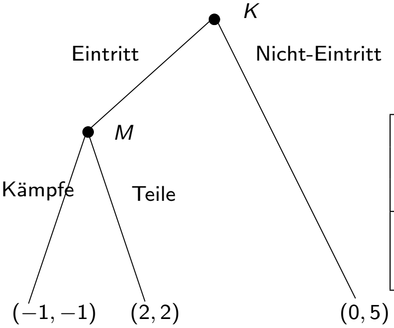
- Bei asymmetrischen Kostenfunktionen sowie bei nichtlinearen Kostenfunktionen ist diese Form der Kartellvereinbarung unplausibel.
- Probleme bei Unsicherheit bezüglich der Kostenfunktion des Konkurrenten.
- Probleme bei unbeobachtbaren Handlungen bzw. Zufallseinflüssen auf das Marktergebnis.
- Der Diskontfaktor drückt eine Zeitpräferenz aus. Diese könnte bei beiden Spielern unterschiedlich sein. Was passiert bei $\delta_i < 9/17 < \delta_j$? ($\rightarrow$ Übung)

- Annahme: Freihandel ist vorteilhaft für beide Länder.
- Durch Handelsbeschränkungen, z.B. Zölle, werden Handelsgewinne in das Inland umgelenkt; das Ausland wird seinerseits Zölle (Retorsionszölle) erheben, um diesen Nachteil auszugleichen. Das Ergebnis ist für beide suboptimal.
- Es besteht kein Anreiz, unilateral die Handelsbeschränkung wieder aufzuheben (Dilemma).
- Freihandel ist keine strategisch stabile Situation.

		Land B	
		Zoll	Zollabbau
Land A	Zoll	(80,80)	(120,60)
	Zollabbau	(60,120)	(100,100)

- Lösung des Dilemmas z.B. durch Verhandlungen mit der Möglichkeit, Verträge abzuschließen (z.B. WTO).
- Formulierung von Triggerstrategien bei unendlichen Zeithorizont (hoher Diskontfaktor realistisch?).

- Spieler: Monopolist, potenzieller Konkurrent, der in den Markt eintreten möchte.
- $S_M = \{\text{Kämpfe, Teile}\}$, $S_K = \{\text{Eintritt, Nicht-Eintritt}\}$.



		M	
		Kämpfe ($y_n = 1$)	Teile ($y_n = 0$)
K	Eintritt	$(-1,-1)$	(b,b)
	Nicht-Eint.	$(0,a)$	$(0,a)$

Das einfache Markteintrittsspiel ist leicht zu lösen:

- In der extensiven Form erkennt man durch Rückwärtsinduktion, dass der Monopolist keinen kostspieligen Preiskampf auf sich nehmen wird und “Teile” spielen wird. Dies kann der potenzielle Konkurrent antizipieren und tritt in den Markt ein.
- In der Matrixform ist zu erkennen, dass (Eintritt, Teile) und (Nicht-Eintritt, Kampf) beides Nash-Gleichgewichte sind, letzteres beruht aber auf einer unglaubwürdigen Drohung, ist also nicht teilspielperfekt.

- Das Ergebnis ist bei nur einem Konkurrenten banal. Man stelle sich nun den Monopolisten als **Handelskette** vor, die an mehreren Orten (Teilmärkten) $n = 1, 2, ...$ tätig ist, an denen sukzessiv ein Konkurrent in den Teilmarkt eintreten könnte (wiederholtes Spiel).
- Der kostspielige Spielzug "Kämpfe" könnte sinnvoll sein, wenn es gelingt, nicht nur am betreffenden Ort, sondern auch an anderen Orten Konkurrenten vom Markteintritt abzuschrecken.
- Sei y_n die vermutete Wahrscheinlichkeit, dass der Monopolist am Ort n kämpft. Dann wird der Konkurrent am Ort n nur dann in den Markt eintreten, wenn nach seiner Wahrscheinlichkeitseinschätzung $y_n(-1) + (1 - y_n)b \geq 0$ ist. Der Monopolist ist folglich daran interessiert, eine **Reputation** als Kämpfer aufzubauen, damit y_n möglichst hoch eingeschätzt wird.

Bei einer endlichen Handelskette $n = 1, ..., N$ kann diese Abschreckung nicht gelingen (Selten (1978)). Auf der letzten Stufe $n = N$ ist ein weiterer Reputationsaufbau sinnlos, und der Mopnopolist wird "Teilen" spielen. Der Konkurrent antizipiert dies und tritt in den Markt ein. Durch Rückwärtsinduktion wird klar, dass an keinem Ort "Kampf" gewählt werden wird, so dass überall die Konkurrenten eintreten werden. Da dies intuitiv nicht mit der empirischen Wirklichkeit übereinzustimmen scheint, spricht man hier vom **Handelsketten-Paradoxon** (Chainstore paradox).

Eine glaubwürdige Abschreckungsstrategie kann bei unendlich häufiger Wiederholung implementiert werden.

Eine Abschreckung und der Aufbau von Reputation ist aber auch dann möglich, wenn **unvollständige Information** vorliegt, also die Konkurrenten nicht sicher wissen, ob sich der Monopolist einen Preiskampf leisten kann oder nicht!

Es gelten dieselben Annahmen wie im statischen Modell aus Kapitel 6.

Das Spiel werde unendlich oft wiederholt: $G(\infty, \delta)$. Es werde folgende Strategiekombination gespielt:

> „*Beginne mit* $\pi = \pi^e = 0$. *Spiele auf der nächsten Stufe* $\pi = \pi^e = 0$, *falls zuvor stets* $\pi = 0$ *gewählt wurde, und ansonsten* $\pi = \pi^e = \lambda A_n$.“

Es wird eine Nullinflationspolitik angekündigt und durchgeführt. Die glaubwürdige Drohung besteht darin, dass das Publikum im Falle einer Überraschungsinflation der Zentralbank keinen Glauben mehr schenkt. Es wird dann in Zukunft auf jeder Stufe die einzige teilspielperfekte Lösung des Basisspiels $\pi = \pi^e = \lambda A_n$ realisiert weden.

Wann ist diese Strategiekombination teilspielperfekt?

- Auszahlung der Zentralbank bei erwarteter und realisierter Nullinflationspolitik:
$$u_Z^K = -\lambda A_n^2$$
- Auszahlung der Zentralbank bei teilspielperfekter Lösung des Basisspiels:
$$u_Z^D = -\lambda(1+\lambda)A_n^2$$
- Einmalige Auszahlung, wenn die Zentralbank die Nullinflationserwartung des Publikums ausnutzt (Überraschungsinflation):

$$\pi^{ueb} = R_Z(\pi^e = 0) = \frac{\lambda}{(1+\lambda)}(A_n + 0)$$
$$\Rightarrow \quad u_Z^{ueb} = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)}A_n^2 \quad > u_Z^K$$

Abdiskontierte Zahlungsreihen bei Einhaltung der Nullinflationspolitik und bei Überraschungsinflation:

$$V^K = -\frac{1}{1-\delta}\lambda A_n^2$$
$$V^{ueb} = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)}A_n^2 - \frac{\delta}{1-\delta}\lambda(1+\lambda)A_n^2$$

Ein Vergleich beider Zahlungsreihen ergibt:

$$V^K \geq V^{ueb}$$
$$-\frac{1}{1-\delta}\lambda A_n^2 \geq -\frac{\lambda}{(1+\lambda)}A_n^2 - \frac{\delta}{1-\delta}\lambda(1+\lambda)A_n^2$$
$$1 \leq (1-\delta)\frac{1}{(1+\lambda)} + \delta(1+\lambda)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2+\lambda} \leq \delta$$

Es fällt auf, dass der kritische Diskontfaktor negativ von λ abhängt: Je mehr Wert die Zentralbank auf das Beschäftigungsziel legt, desto kleiner darf der Diskontfaktor sein, der eine zeitkonsistente Nullinflationspolitik gewährleistet. Dies erscheint kontraintuitiv, erklärt sich aber dadurch, dass die relative Einbuße, die die Zentralbank aus dem Verlust ihrer Glaubwürdigkeit erleidet, $-u_Z^D/u_Z^K = \lambda - 1$ proportional mit λ wächst, während die relative Vorteilhaftigkit der Überraschungsinflation $u_Z^{ueb}/u_z^K = 1/(1+\lambda)$ mit zunehmendem λ immer kleiner wird.

9. Spiele mit unvollständiger Information

Gliederung:

- Spiele mit unvollständiger Information = Bayes-Spiele (Thomas Bayes, 1702-1761)
- Vollständige Information: Alle spielrelevanten Informationen $G = \{S_1, ..., S_n, u_1, ..., u_n\}$ sind gemeinsames Wissen. Daher haben alle Spieler *denselben* Informationsstand.
- Unvollständige Information: Mindestens ein Tatbestand ist nicht gemeinsames Wissen, d.h. es existiert *private* Information und daher Informationsasymmetrie.
- In der Regel ist die Auszahlungsfunktion u_i private Information von Spieler i.
- Auch der Informationsstand eines Spielers kann dessen private Information sein.

- **Typologisierung**: Es werden mögliche Ausprägungen des unbekannten Merkmals, z.B. der Auszahlungsfunktion, festgelegt (Harsanyi 1967/1968).
- Spieler i kann z.B. vom Typ $t_1, t_2, ...$ sein.
- Es sei T_i der (diskrete oder stetige) *Typenraum* von Spieler i mit $t_i \in T_i$.
- Spieler i kennt seinen eigenen Typ. Die anderen Spieler müssen *Erwartungen* bezüglich des Typs von Spieler i bilden.

Beispiele:

- Die Technologie – und damit die Kosten- und Gewinnfunktion – mit der Unternehmen i arbeitet, ist dessen private Information. Angenommen, die Kostenfunktionen seien linear. Dann wissen die Konkurrenten z.B. nur:

$$T_i = \{MC_i^{niedrig} = 1, MC_i^{mittel} = 2, MC_i^{hoch} = 4\}$$

- Das Publikum weiß nicht, an welchen Zielen sich die Zentralbank orientiert. Ist sie vom „harten Typ“ (t_1), so orientiert sie sich ausschließlich am Inflationsziel. Ist sie vom „weichen Typ“ (t_2), so spielt für sie auch das Konjunktur- bzw. Beschäftigungsziel eine Rolle.
- Ein Bieter in einer Auktion kennt die Wertschätzung nicht, die ein anderer Bieter i dem auktionierten Gegenstand entgegenbringt. Er weiß aber, dass diese Wertschätzung im Intervall $[0, 1000]$ liegt, also ist $T_i = [0, 1000]$.

- Nach Harsanyi kann ein Spiel mit unvollständiger Information in ein Spiel mit vollständiger, aber unvollkommener Information überführt werden.
- Als weiterer „Spieler“ wird die „Natur“ eingeführt. Die Natur wählt aus dem Typenraum den Typ des Spielers i aus. Spieler i kann diesen Zug beobachten (d.h. er kennt seinen Typ), andere Spieler jedoch nicht.
- Die anderen Spieler ordnen den möglichen Spielzügen der Natur, d.h. den Typen $t_i \in T_i$ subjektive Wahrscheinlichkeiten zu.

- Die Vermutungen bzw. Erwartungen („beliefs“) eines Spielers i bezüglich des Typs eines oder mehrerer anderer Spieler ist *subjektiv* (Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Bayes).

- *Apriori-Erwartungen* (prior): liegen vor Beginn des Spiels vor.
- *Aposteriori-Erwartungen* (posterior): werden im Spielverlauf aus den Apriori-Erwartungen, den realisierten (beobachteten) Spielzügen und den bedingten Wahrscheinlichkeiten gebildet, mit denen die Spielertypen bestimmte Spielzüge durchführen. Die Erwartungen sind dann zwar weiterhin subjektiv, jedoch stets *konsistent* mit den Beobachtungen.

Notation:

- Produkt der Typenräume aller anderen Spieler: $T_{-i} = \times_{j \neq i} T_j$
- Vektor der Typen aller anderen Spieler: $t_{-i} \in T_{-i}$ (Typkonfiguration aller anderen Spieler)
- Wahrscheinlichkeitserwartung von Spieler i vom Typ t_i bezüglich einer Typkonfiguration der anderen Spieler:

  $$p_i(t_{-i}|t_i)$$

  Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, weil die Erwartung vom eigenen Typ t_i, d.h. von seinen privaten Informationen abhängen kann.

- Die anderen Spieler $-i$ treffen Vermutungen über den Typ von i und dessen Strategiewahl.
- Die Strategiewahl von i wiederum hängt von seinem eigenen Typ t_i sowie von seinen Vermutungen über t_{-i} ab.
- Wenn i also das Verhalten der anderen Spieler antizipieren möchte, so muss er sich auch darüber Gedanken machen, welche Vermutungen die anderen Spieler über seinen Typ – und somit seine Vermutungen über sie – anstellen.
- Auch wenn er weiß, dass er z.B. vom Typ t_2 ist, so muss er dennoch auch die Vermutungen $p_i(t_{-i}|t_1)$, $p_i(t_{-i}|t_3)$ usw. formulieren und in sein Kalkül einbeziehen.

Die tatsächliche Auszahlung für Spieler i, hängt nun von den gewählten Strategien ab – die ihrerseits von den Typen abhängen – und von den tatsächlichen Typen der Spieler:

$$u_i = u_i(s_1(t_1), ..., s_n(t_n), t_1, ..., t_n)$$

Kurznotation:

$$s_{-i}(t_{-i}) = (s_1(t_1), ..., s_{i-1}(t_{i-1}), s_{i+1}(t_{i+1}), ..., s_n(t_n))$$

und somit

$$u_i = u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Die tatsächlich realisierte Auszahlung $u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$ kann Spieler i aber nicht bestimmen, weil er die Typkonfiguration t_{-i} ja nicht kennt.

Erwartete Auszahlung:

$$E[u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})] = \sum_{\{t_{-i}\}} p_i(t_{-i}|t_i) u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Ein rationaler Spieler i maximiert seine erwarteten Auszahlungen. Das setzt allerdings Überlegungen bezüglich des gleichgewichtigen Verhaltens der anderen Spieler voraus.

Achtung: Auch wenn ein Spieler weiß, dass er z.B. vom Typ t_2 ist, so muss er auch das Maximierungskalkül lösen, d.h. die beste Antwort suchen, für den Fall, dass er vom Typ $t_1, t_3, \ldots$ gewesen wäre.

Warum? Die anderen Spieler rechenn mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit damit, dass er vom Typ t_1, t_3 usw. ist und kalkulieren die besten Antworten *dieser* Typen in ihre eigenen Entscheidungen ein. Wenn Spieler i also das Verhalten der anderen Spieler zu antizipieren versucht, so muss er auch die besten Antworten dieser anderen Typen kennen!

Zu den *Spielregeln* eines Bayes-Spiels gehören demnach auch die Typenräume und die Wahrscheinlichkeitseinschätzungen:

$$G = \{S_1, ..., S_n, T_1, ..., T_n, u_1, ..., u_n, p_1, ...p_n\}$$

Diese Spielregeln sind *gemeinsames Wissen*!

Beachte: Auch die Erwartungen $p_i = p_i(t_{-i}|t_i)$ (jeweils für alle Typen) sind gemeinsames Wissen.

Bayes-Nash-Gleichgewicht:

Ein Strategievektor $(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}))$ ist ein Bayes-Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

$$E[u_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i})] \geq E[u_i(s_i(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i})]$$

$$\forall s_i \in S_i, \quad \forall t_i \in T_i, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Ein Bayes-Nash-Gleichgewicht liegt vor, wenn jeder Spieler jeden Typs jeweils seine beste Antwort wählt, d.h. diejenige, die seinen (subjektiv) erwarteten Nutzen maximiert.

Das Gleichgewicht hängt von den Erwartungen p_i aller Spieler jeden Typs ab!

Wichtige Eigenschaft des Bayes-Nash-Gleichgewichts:

- Die Optimalität der Strategiewahl aller Spieler ist lediglich *ex ante* gegeben. D.h. es besteht ex ante kein Anreiz für einen Spieler, von seiner Strategie abzuweichen.
- Aufgrund der realisierten Strategien werden sich im Allgemeinen die Einschätzungen über den Typ der anderen Spieler $p_i(t_{-i}|t_i)$ ändern! Es werden Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten gebildet. Je nach Konstruktion des Spiels kann die Strategiewahl auch den Typ des Spielers *offenbaren* (sog. separating equilibrium).
- Unter Berücksichtigung der durch die beobachteten Spielzüge offenbarten Informationen müssen *ex post* die ursprünglichen Strategieentscheidungen nicht mehr optimal sein.

- Neben den sehr hohen Anforderungen an die kalkulatorischen Fähigkeiten der Spieler stellt sich die Frage, woher das gemeinsame Wissen über die Vermutungen aller Spieler (jeden Typs) kommt.
- Die Erwartungen sind subjektiv und müssen auch nicht „kompatibel“ sein. Daher ist die Menge aller möglichen Wahrscheinlichkeitseinschätzungen sehr groß, und es können sehr viele Bayes-Nash-Gleichgewichte entstehen.
- Nahezu jede Strategiekombination lässt sich dann durch Konstruktion entsprechender Vermutungen p_i als Bayes-Nash-Gleichgewicht rechtfertigen.
- Es bedarf einer sinnvollen Eingrenzung!

Common Priors:

- Die Wahrscheinlichkeitseinschätzungen der Spieler (priors) sollen auf „objektiven Grundlagen“ beruhen.
- Zwar ist der eigene Typ eine private Information des Spielers, aber die Wahrscheinlichkeiten möglicher Typkonfigurationen $(t_1, ..., t_n)$ seien gemeinsames Wissen.

$$p(t_1, ..., t_n) = p(t_i, t_{-i}) \quad \text{Common prior}$$

- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i vom Typ t_i ist, ist dann gegeben durch:

$$p(t_i) = \sum_{\{t_{-i}\}} p(t_i, t_{-i})$$

Die Wahrscheinlichkeitserwartung von Spieler i vom Typ t_i bezüglich der Typkonfiguration der anderen Spieler ergibt sich dann durch die *Bayes-Regel*:

$$p(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)}$$

Wenn also die priors $p(t_1, ..., t_n)$ Common Knowledge sind, dann kann jeder Spieler jede beliebige bedingte Erwartung bezüglich der Typkonfiguration bestimmen.

Falls es überhaupt keine Informationen gibt, die Aufschluss über die Typkonfiguration geben (sog. nicht-informativer prior), dann können alle Typkonfigurationen als gleichwahrscheinlich angenommen werden, sodass auch alle bedingten Wahrscheinlichkeiten identisch sind.

Beispiel:

		Spieler 2		
		t_{21}	t_{22}	$\sum$
Spieler 1	t_{11}	0.2	0.4	$p(t_{11}) = 0.6$
	t_{12}	0.1	0.3	$p(t_{12}) = 0.4$
$\sum$		$p(t_{21}) = 0.3$	$p(t_{22}) = 0.7$	1

Angenommen, Spieler 1 ist vom Typ t_{11}. Seine Erwartungen sind dann gegeben durch

$$p(t_{21}|t_{11}) = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}, \qquad p(t_{22}|t_{11}) = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$$

Mit Common Priors wird nicht nur die Zahl möglicher Bayes-Nash-Gleichgewichte eingeschränkt. Es wird auch erreicht, dass die Erwartungen aller Spieler *konsistent* sind, denn sie ergeben sich ja jeweils aus derselben unbedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

10. Unvollständige Information: Ökonomische Anwendungen

Gliederung:

Annahmen:

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ eines homogenen Gutes
- Nachfragefunktion: $p(x) = a - x = a - x_1 - x_2$
- Kostenfunktion von Unternehmen 1: $K_1(x_1) = c_1 x_1$ ist gemeinsames Wissen
- Kostenfunktion von Unternemen 2 ist dessen private Information
- Typologisierung: $T_2 = \{c_L, c_H\}$

$$\begin{aligned} t_{2L}: &\qquad K_{2L}(x_2) = c_L x_2 \\ t_{2H}: &\qquad K_{2H}(x_2) = c_H x_2 \quad \text{mit } c_H > c_L \end{aligned}$$

- Erwartungen: $p(t_{2L}) = q, \quad p(t_{2H}) = 1 - q.$

Die Gewinn- und somit Reaktionsfunktion von Unternehmen 2 hängt von dessen Typ ab:

$$G_{2L} = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_L x_2$$
$$G_{2H} = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_H x_2$$

Unabhängig von dem tatsächlichen Typ muss Unternehmen 2 für *beide* Fälle die Reaktionsfunktionen kalkulieren, weil Unternehmen 1 bei seiner Entscheidung ebenfalls beide Reaktionsfunktionen in Betracht zieht:

$$\Rightarrow \qquad x_2(t_{2L}) = \frac{a - x_1 - c_L}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad x_2(t_{2H}) = \frac{a - x_1 - c_H}{2}$$

Unternehmen 1 maximiert seinen erwarteten Gewinn:

$$\begin{aligned} E[G_1] &= q[(a - c_1 - x_1 - x_2(t_{2L}))x_1] \\ &\quad + (1-q)[(a - c_1 - x_1 - x_2(t_{2H}))x_1] \\ &= (a - c_1 - x_1)x_1 - (qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))x_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E[G_1]}{\partial x_1} = a - c_1 - 2x_1 - \underbrace{(qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))}_{E[x_2]} = 0 \quad \text{(BEO)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = R_1(E[x_2]) = \frac{a - c_1 - (qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))}{2}$$

Die Reaktionsfunktion ist die beste Antwort auf die *erwartete* Menge des Konkurrenten. Um jedoch eine konkrete Mengenentscheidung zu treffen, muss Unternehmen 1 die jeweiligen Reaktionsfunktionen von Typ 1 und Typ 2 einsetzen.

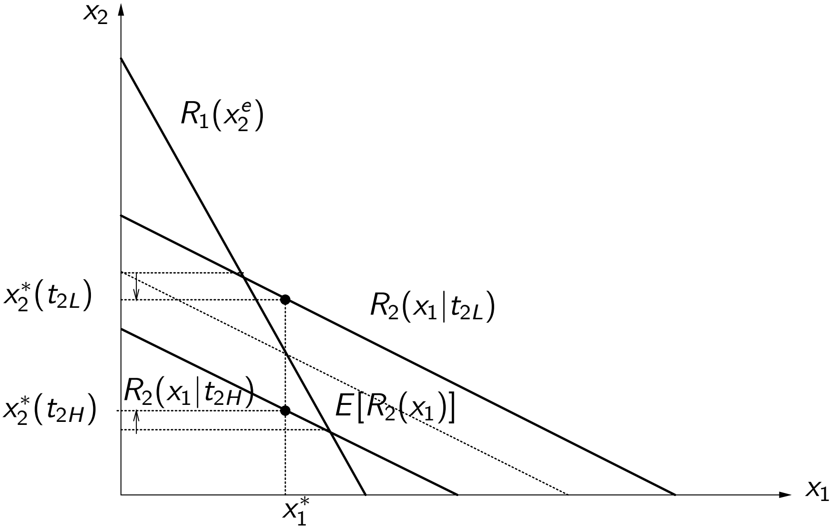
Gleichgewichtige Mengenentscheidung von Unternehmen 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a - c_1 - \left[q\left[\frac{a-x_1-c_L}{2}\right] + (1-q)\left[\frac{a-x_1-c_H}{2}\right]\right]}{2} \\ &= \frac{2a - 2c_1 - [a - x_1 - qc_L - (1-q)c_H]}{4} \\ \frac{3}{4}x_1 &= \frac{a - 2c_1 + qc_L + (1-q)c_H}{4} \\ x_1^* &= \frac{a - 2c_1 + qc_L + (1-q)c_H}{3} \end{aligned}$$

Gleichgewichtige Mengenentscheidung von Unternehmen 2....

... vom Typ t_{2L} : $\quad x_2^*(t_{2L}) = \frac{a - 2c_L + c_1}{3} - \frac{(1-q)}{6}(c_H - c_L)$

... vom Typ t_{2H} : $\quad x_2^*(t_{2H}) = \frac{a - 2c_H + c_1}{3} - \frac{q}{6}(c_L - c_H)$



x_2
$R_1(x_2^e)$
$x_2^*(t_{2L})$
$R_2(x_1|t_{2L})$
$R_2(x_1|t_{2H})$
$x_2^*(t_{2H})$
$E[R_2(x_1)]$
x_1
x_1^*

Nach der Wahl der Mengen kann Unternehmen 1 den Typ des Unternehmens 2 anhand dessen Mengenentscheidung identifizieren.

Vergleich zur Situation mit vollständiger Information:

- Das Unternehmen 2 vom Typ t_{2L} verliert im Vergleich zur Situation mit vollständiger Information (schränkt die Menge ein). Es hat also ein Interesse daran, seinen Typ vor dem Spiel glaubwürdig zu signalisieren.
- Das Unternehmen 2 vom Typ t_{2H} profitiert von dem Informationsdefizit des Konkurrenten (dehnt die Menge aus), d.h. es würde sich bei vollständiger Information schlechter stellen.

Verschiedene Auktionstypen:

- *Einfache Auktion:* auf einer Seite (z.B. Angebotsseite) gibt es nur einen Spieler.
- *Doppelte Auktion:* mehrere Spieler auf beiden Seiten

- *Sealed bid:* Die Gebote werden gleichzeitig bzw. für die Mitbieter nicht beobachtbar abgegeben.
- *Open bid:* offene beobachtbare Gebote (Unterschied nur bei sequentiellen Spiel interessant)

- *First price auction:* Der Höchstbietende zahlt das Höchstgebot
- *Second price auction:* Der Höchstbietende zahlt das zweithöchste Gebot (Vickrey-Auktion)

Beispiele:

- *Englische Auktion:* Open bid, first price, preisaufsteigende sequentielles Bieten, Start mit Mindestgebot.
- *Holländische Auktion:* Open bid, first price, preisabsteigendes sequentielles Bieten, Start mit (prohibitiv) hohem Gebot.

Einfache Auktion: Sealed bid, first price

- Zwei Bieter $i = 1, 2$
- Wertschätzung v_i für das auktionierte Gut ist private Information
- Typologisierung: $t_i = v_i \in [0, 1] = T_i$
- Erwartungen: $v_i \sim U[0, 1]$ (Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall)
- Strategievariable ist das Gebot b_i
- Rationalität erfordert $b_i \leq v_i$

Auszahlungsfunktion:

$$u_i(b_i, b_j) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{falls } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{falls } b_i = b_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *erwartete Auszahlung* ist folglich:

$$E[u_i] = (v_i - b_i)Prob(b_i > b_j) + \left(\frac{v_i - b_i}{2}\right)Prob(b_i = b_j) + 0Prob(b_i < b_j)$$

und da bei *stetigen* Zufallsvariablen die *Punkt*wahrscheinlichkeit Null ist (also $Prob(b_i = b_j) = 0$):

$$E[u_i] = (v_i - b_i)Prob(b_i > b_j)$$

Ein rationales Gebot erfordert $b_j < v_j$ bzw.
$b_j = \alpha \cdot v_j$ mit $\alpha \in (0,1)$.

Folglich:

$$Prob(b_i > b_j) = Prob(b_i > \alpha v_j) = Prob(b_i/\alpha > v_j)$$

Wegen der Gleichverteilungs-Eigenschaft ist dies

$$Prob(v_j < b_i/\alpha) = \frac{b_i}{\alpha}$$

Einsetzen in den erwarteten Gewinn:

$$E[u_i(b_i, b_j)] = (v_i - b_i)\frac{b_i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial E[u_i]}{\partial b_i} = \frac{v_i}{\alpha} - 2\frac{b_i}{\alpha} = 0 \quad \text{(BEO)}$$

$$\Rightarrow \quad b_i^* = \frac{v_i}{2}, \quad \text{für } i = 1,2 \quad \text{optimales Gebot}$$

und somit $\alpha = 1/2$. Damit ist sichergestellt, dass $b_i/\alpha \in [0,1]$.

Erweiterung auf drei Bieter:

Den Zuschlag erhält Spieler i nur dann, wenn sein Gebot größer als das von Spieler j *und* von Spieler k ist. Unter Berücksichtigung, dass alle Punktwahrscheinlichkeiten Null sind, ist die erwartete Auszahlung:

$$\begin{aligned} E[u_i] &= (v_i - b_i) Prob(b_i > b_j) Prob(b_i > b_k) \\ &= (v_i - b_i) Prob(b_i/\alpha > v_j) Prob(b_i/\beta > v_k) \\ &= (v_i - b_i) \frac{b_i}{\alpha} \frac{b_i}{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E[u_i]}{\partial b_i} = \frac{2v_i b_i}{\alpha\beta} - \frac{3b_i^2}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2v_i - 3b_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad b_i = \frac{2}{3} v_i$$

$$\Rightarrow \quad b_i = \frac{n-1}{n} v_i \quad \text{(bei } n \text{ Bietern)}$$

Exkurs: Auktionen, bei denen die Bieter den Wert des zu ersteigernden Gutes nicht genau kennen.

- Sei $\bar{w}$ der „wahre“ Wert des Gutes.
- Die Erwartungen der Bieter divergieren, sind aber im Mittel korrekt: $E[w] = \bar{w}$.
- Sind viele Bieter beteiligt und/oder werden die Gebote sukkzessiv oder in mehreren Bieterrunden abgegeben, so werden die Gebote nahe an dem subjektiv erwarteten Wert liegen.
- Den Zuschlag erhält das höchste Gebot. Dieses wird aber von jemandem abgegeben, der den wahren Wert überschätzt hat.
- Der Gewinner der Auktion hat somit einen negativen Nettonutzen („Fluch des Gewinners“, „Winner´s Curse“).

- Akerlof, G.A. (1970), The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Markez Mechanism. *Quarterly Journal of Economics* Vol. 84, 499-500.
- Nobelpreis 2001 an George A. Akerlof, A. Michael Spence, Joseph E. Stiglitz „for their analyses of markets with asymmetric information“.
- *Informationsasymmetrie* kann die Koordinationsfunktion von Märkten und somit deren Effizienz beeinträchtigen. Spieltheoretisch gesehen: Unvollständige Information, d.h. private Information einiger Spieler.

Markt für Gebrauchtwagen:

- Verkäufer kennt die Qualität des Wagens, Käufer kennt sie nicht.
- Wagen mit schlechter Qualität = „Lemons“

Annahmen:

- Qualität q sei gleichverteilt auf Intervall $[0, b]$.
- Verkäufer möchten mindestens einen Preis p erzielen, der der Qualität ihres Wagens entspricht, hier vereinfacht: $p \geq q$.
- Käufer sind bereit, für einen Wagen der Qualität q einen Preis zwischen q und $\frac{3}{2}q$ zu bezahlen. Allerdings kennen sie q nicht!

Bei dem Spiel ist das Preisgebot die Strategievariable von Käufer und Verkäufer. Bietet der Käufer mindestens so viel wie der Verkäufer gerade noch akzeptieren würde, kommt der Handel zustande, und beide Spieler erhalten eine positive Auszahlung (effizienter Tausch). Andernfalls kommt kein Tausch zustande.

Käufer kann q nicht beobachten. Er erwartet eine durchschnittliche Qualität von $\bar{q}$. Seine maximale Zahlungsbereitschaft ist somit $\frac{3}{2}\bar{q}$.

Angenommen, der Marktpreis sei $p > 0$.

Dann bieten nur solche Verkäufer ihren Wagen an mit $q \in [0, p]$. Die Durchschnittsqualität des Angebots ist somit $\bar{q} = \frac{p}{2}$.

Dies antizipieren die Käufer: Ihre maximale Zahlungsbereitschaft ist demnach $\frac{3}{2}\frac{1}{2}p = \frac{3}{4}p < p$.

Der Handel kommt nicht zustande. Dies gilt für alle $p > 0$.

Grundproblem:

- Ein Preis, der für Besitzer guter Wagen attraktiv ist, ist für Besitzer schlechter Wagen erst recht attraktiv.
- Bei jedem Preis fallen die darüber liegenden Qualitäten heraus, die Durchschnittsqualität sinkt.
- Dementsprechend sinkt die Zahlungsbereitschaft der Kunden, die dies durchschauen.
- Der Markt bricht zusammen.
- Unter anderen Annahmen über die Qualitätsverteilung muss das Ergebnis nicht so extrem sein.

$\Rightarrow$ **Adverse Selektion!**

Lösungen: Überwindung der Informationsasymmetrie durch

- Screening (geht vom Nachfrager aus)
- Signalling (geht vom Anbieter aus)

Wo ist das Problem relevant?

- *Arbeitsmarkt:*
  Qualität (Produktivität) eines Anbieters von Arbeitskraft kann vom Unternehmen nicht eingeschätzt werden.Orientiert sich der Lohnsatz an der Durchschnittsproduktivität, so werden hochqualifiziertes Personal kein Interesse an einem Kontrakt haben.
- *Versicherung:*
  Der Versicherte kent seine Risiken genauer als die Versicherung. Diese wird ihm einen Durchschnittsvertrag anbieten. Dieser ist für Personen mit geringen Risiken unattraktiv.

11. Theorie der Verhandlungen

Gliederung:

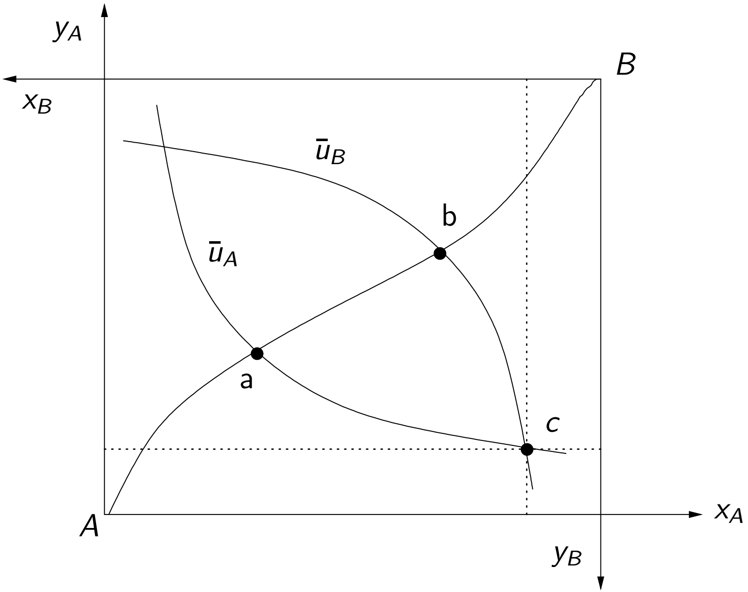
- Die Spieler können *verbindliche Abmachungen* treffen (Verträge schließen).
- Dies setzt *Kommunikation* voraus.
- Eine Lösung eines Spiels muss dann nicht mehr selbst-stabilisierend sein, denn ein möglicher Anreiz zum Abweichen von einer Strategie besteht aufgrund der exogen durchsetzbaren Vertragsbindung nicht mehr.
- Das Problem besteht nun darin, einen geeigneten Strategievektor und damit einen bestimmten Auszahlungsvektor festzulegen, d.h. auszuhandeln.
- Da die Strategiewahl durch verbindliche Abmachungen festgelegt wird, kann sich die Analyse allein auf die möglichen *Auszahlungsvektoren* konzentrieren.

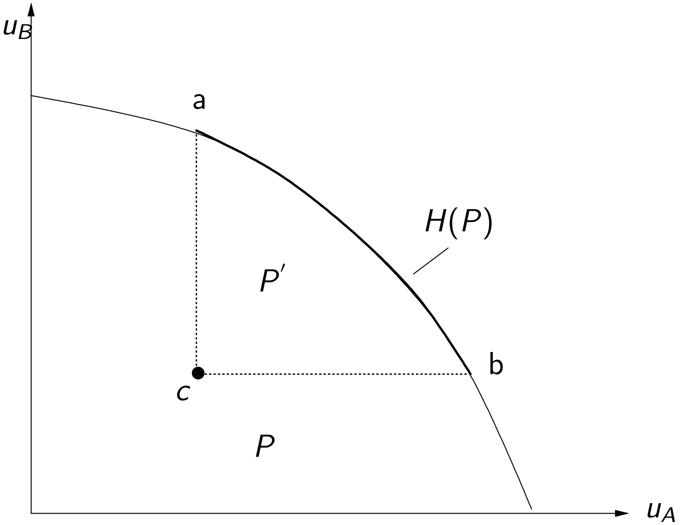
- **Auszahlungsvektor:** $u = (u_1, ..., u_n)$
- **Auszahlungsraum** P: Menge aller möglichen Auszahlungsvektoren
- **Konfliktpunkt**: $c = (c_1, ..., c_n) \in P$ ist derjenige Auszahlungsvektor, der realisiert wird, falls keine Einigung erzielt wird. Der Konfliktpunkt („Drohpunkt") c kann fixiert oder variabel, d.h. selbst Gegenstand des Spiels sein.

- **Verhandlungsproblem:** Es existiert mindestens ein Auszahlungsvektor $u \in P$ mit $u_i > c_i \forall i$, d.h. es ist eine Paretoverbesserung möglich.
- **Lösungsproblem:** Es existieren *mehrere* Auszahlungsvektoren $u \in P$ mit $u_i > c_i \forall i$, also

$$P^{'} = \{u | u_i > c_i \ \forall i\} \subseteq P$$

- Eine Lösung sollte nur solche Elemente aus $P^{'}$ auswählen, die pareto-optimal sind. Die Menge alle pareto-optimalen Auszahlungsvektoren heißt **Paretogrenze** $H(P) \subseteq P^{'}$.


y_A
B
x_B
$\bar{u}_B$
b
$\bar{u}_A$
a
c
A
x_A
y_B


u_B
a
$H(P)$
P'
b
c
P
u_A

Axiomatische Verhandlungsspiele:

- Eine *Lösung* eines Verhandlungsspiels ist eine Funktion $f(P, c)$, die einen Auszahlungsvektor aus P auswählt. Diese Lösung soll bestimmte wünschenswerte Eigenschaften aufweisen (z.B. Pareto-Effizienz: $f(P, c) \in H(P)$).
- Es wird vorausgesetzt, dass diese Lösung aufgrund bindender Verträge auch implementiert werden kann, d.h. sie muss nicht selbst-stabilisierend sein.
- Es sei vorausgesetzt, dass P konvex ist.
- Der *Verhandlungsablauf* wird nicht untersucht!

Behavioristische Verhandlungsmodelle:

Modellierung des Verhaltens der Spieler im Verhandlungsprozess

Strategische (nicht-kooperative) Verhandlungsspiele:

Strategisches Verhalten im Verhandlungsprozess ohne die Möglichkeit bindender Verträge. Der Verhandlungsprozess ist letztlich eine Art strategischer Koordinationsprozess zur Auswahl eines Punktes auf der Paretogrenze $H(P)$.

Nach dem Konzept von Nash (1950) soll eine Lösung durch folgende Eigenschaften (Axiome) charakterisiert sein:

(A.1) **Unabhängigkeit von äquivalenten Nutzentransformation:**

Angenommen, es gibt zwei Verhandlungsspiele $B = (P, c)$ und $\bar{B} = (\bar{P}, \bar{c})$ mit

$$\bar{u}_i = a_i u_i + b_i \quad \text{für alle } i, u \in P \text{ mit } a_i > 0$$

Dann gilt das auch für die Lösung:

$$f(\bar{P}, \bar{c}) = a_i f(P, c) + b_i$$

Hinweis: Durch äquivalente Nutzenransformationen lassen sich alle Spiele „symmetrisieren", vor allem kann der Konfliktpunkt z.B. auf den Ursprung $(0, 0..., 0)$ verlegt werden.

(A.2) **Symmetrie:**

Falls (P, c) symmetrisch ist, dann soll auch die Lösung symmetrisch sein: $f_1(P, c) = f_2(P, c)$. Eine Verhandlungsspiel ist symmetrisch, falls gilt:

- $c_i = c_j \quad \forall i, j$
- Falls $(u_i, u_j) \in P$, dann ist auch $(u_j, u_i) \in P$

(A.3) **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen:**

Gegeben seien zwei Spiele (P, c) und (Q, c) mit gleichem Konfliktpunkt. Dann haben beide dieselbe Lösung $f(P, c) = f(Q, c)$, falls $P \subset Q$ und $f(Q, c) \in P$. (D.h. der Auszahlungsraum Q enthält gegenüber P irrelevante alternative Auszahlungsvektoren, die nicht lösungsbestimmend sind.)

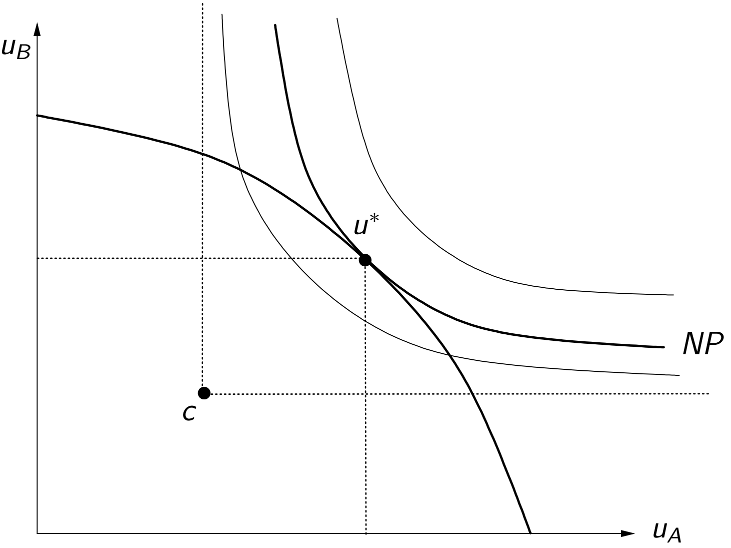
(A.4) **Pareto-Optimalität:**

Ist $f(P, c)$ eine Lösung von $B = (P, c)$, dann ist $f(P, c) \in H(P)$, d.h. es existiert kein $u \neq f(P, c)$ mit $u_i > f_i(P, c)$ *für alle* i.

Nash (1950) hat gezeigt, dass es nur *ein* Lösungskonzept gibt, welches alle vier Axiome erfüllt:

$$f^{Nash}(P, c) = \max_{u \in H(P)} \underbrace{(u_1 - c_1)(u_2 - c_2) \dots (u_n - c_n)}_{NP} = \prod_{i=1}^{n} (u_i - c_i)$$

Hier: Beschränkung auf zwei Spieler: $\max_{u \in P}(u_1 - c_1)(u_2 - c_2)$. Der Nutzenzuwachs beider Spieler im Vergleich zum Konfliktpunkt (*Nash-Produkt*, NP) wird maximiert.



u_B
u^*
NP
c
u_A

Die Nash-Lösung ist eine *Tangentiallösung*:

$$\max_{u_1,u_2,\lambda} L = (u_1 - c_1)(u_2 - c_2) - \lambda H(u_1, u_2)$$

Aus der Bedingung erster Ordnung folgt

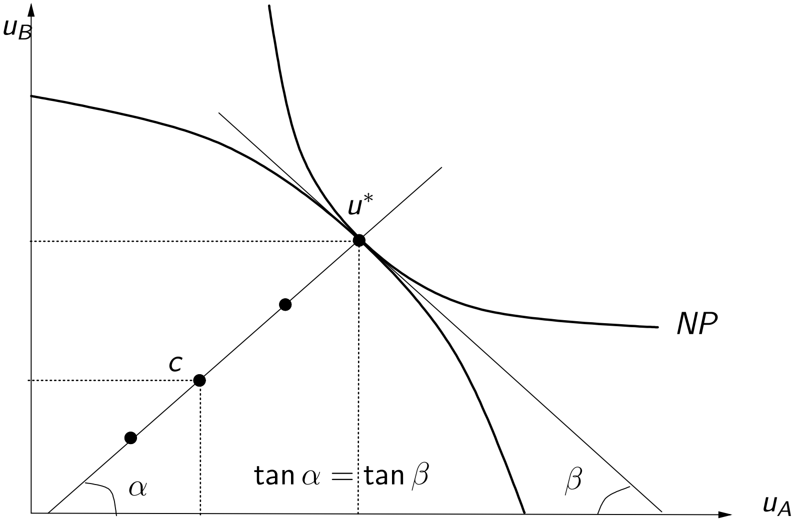
$$\frac{\partial H/\partial u_1}{\partial H/\partial u_2} = \frac{(u_2^* - c_2)}{(u_1^* - c_1)}$$

und aus dem Totalen Differenzial von $H(\cdot)$ folgt

$$= -\frac{du_2}{du_1}$$

Geometrisch bedeutet das, dass die Gerade, die durch u^* und c verläuft, betragsmäßig dieselbe Steigung hat wie die Paretogrenze $H(P)$ im Optimum u^*.

Das impliziert, dass die Lösung u^* für alle Spiele (P, c) gilt, deren Konfliktpunkt c auf derselben Geraden liegt!



u_B
u^*
NP
c
$\tan\alpha = \tan\beta$
α
β
u_A

- Jede Lösung bezieht sich auf Auszahlungsvektoren, d.h. auf *Nutzenwerte*.
- Im Fall der Nash-Lösung sollen beide Spieler im selben (Nutzen-) Maß von der Einigung profitieren.
- Ist die Nutzenfunktion in dem Verhandlungsgegenstand (z.B. Geld) *konvex*, etwa aufgrund abnehmenden Grenznutzens oder Risikoaversion, dann hat das folgende Konsequenz:

  Ein *Bettler* und ein *Millionär* haben eine unterschiedliche Anfangsausstattung an Geld. Beide sind risikoavers. Verhandeln beide über die Aufteilung von 100 Euro, dann sieht die auf einen gleichmäßigen Nutzenzuwachs ausgerichtete Nash-Lösung vor, dass der Millionär z.B. 80 Euro erhält und der Bettler 20 Euro.

Einige Probleme der Nash-Lösung:

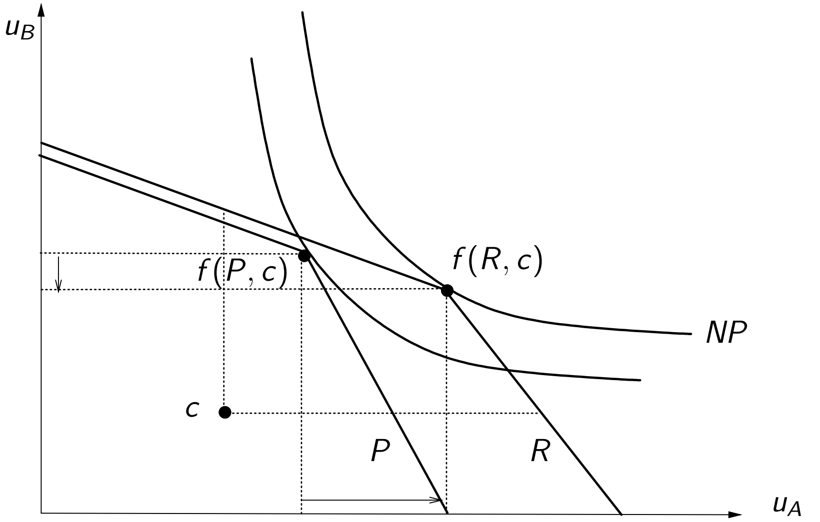
- Aufgrund der Axiome kann jedes Spiel „symmetrisiert“ werden, so dass die Nash-Lösung *denselben* Nutzenzuwachs für beide Spieler postuliert. Dies impliziert aber einen *interpersonellen Nutzenvergleich*! Falls man – wie in der Mikroökonomik üblich – lediglich ordinale Nutzenfunktionen unterstellt, so ist ein modifiziertes Axiomensystem notwendig, was aber z.B. nicht ohne weiteres die Konvexität von P gewährleisten kann.
- Zwar kann jedes Spiel in Bezug auf den Nutzen symmetrisiert werden. In Bezug auf den Verhandlungsgegenstand (z.B. Geldbetrag) gilt das nicht. Die Nash-Lösung hängt nicht von den absoluten (Unterschieden in) Geldbeträgen ab, die aber im Experiment eine große Rolle spielen.

- Monotonieproblem:

(A.5) **Monotonie:**

Eine Lösung $f(P, c)$ ist monoton, wenn für jeden Spieler $f_i(R, c) \geq f_i(P, c)$ gilt, falls $P \subseteq R$. D.h. vergrößert sich der Auszahlungsraum und verschiebt sich insb. die Paretogrenze nach außen, dann darf dies nicht zu Lasten eines Spielers gehen.

Diese wünschenswerte Eigenschaft erfüllt die Nash-Lösung nicht!


u_B
$f(P, c)$
$f(R, c)$
NP
c
P
R
u_A

(A.6) **Individuelle Monotonie:**

Gegeben seien (R, c) und (P, c) sowie $m_i(P) = m_i(R)$, wobei

$$m_i(P) = \arg\max(u_i | (u_i, \cdot) \in P)$$

die für Spieler i maximal mögliche Auszahlung darstellt. Dann gilt für die Lösungen $f_j(R, c) \geq f_j(P, c)$ für $j \neq i$, falls $P \subset R$.

Wenn sich die Auszahlungsgrenze so nach außen verschiebt, dass die maximale Auszahlung von Spieler i gleich bleibt, dann darf Spieler $j \neq i$ keinen Nachteil durch die neue Lösung erleiden.

Der Punkt der maximalen Auszahlungen $m = (m_1, m_2)$ (im 2-Personen-Fall) heißt **Idealpunkt** des Spiels (P, c) und ist im Algemeinen nicht Element des Auszahlungsraums P.

Die **Kalai-Smorodinsky-Lösung** ist durch die Axiome (A.1), (A.2), (A.4) und (A.6) charakterisiert. Im Vergleich zur Nash-Lösung ist das Axiom „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“ durch das Monotonie-Axiom ersetzt worden.

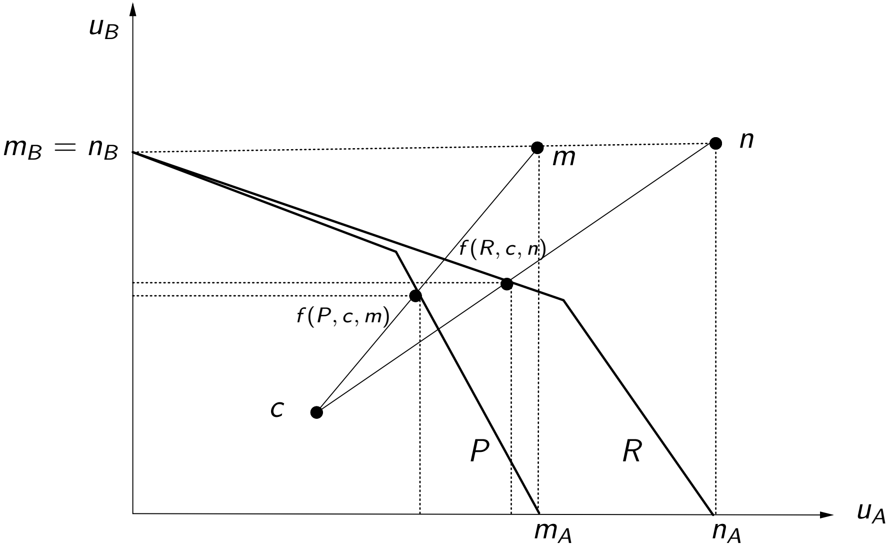
Die Lösung ist eine Funktion $f^{KS}(P, c, m) = u^*$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\frac{u_2^* - c_2}{u_1^* - c_1} = \frac{m_2 - c_2}{m_1 - c_1}$$

und $u_i^* > v_i$ für alle v_i, für die ebenfalls gilt:

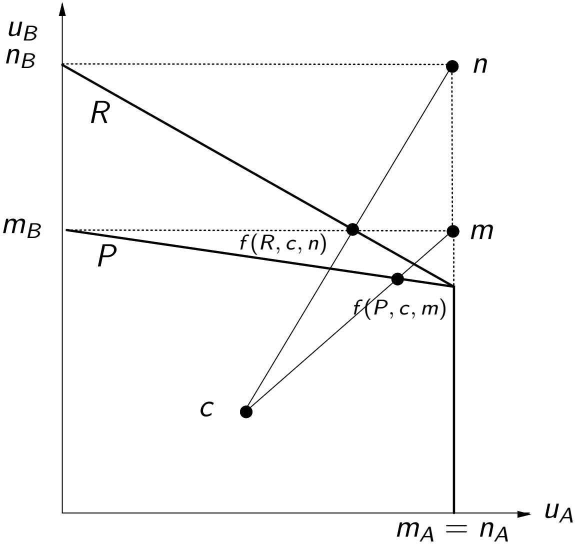
$$\frac{v_2 - c_2}{v_1 - c_1} = \frac{m_2 - c_2}{m_1 - c_1}$$

mit $u^*, v \in P$. Neben dem Konfliktpunkt ist also auch der Idealpunkt bestimmend für die Lösung.


u_B
$m_B = n_B$
m
n
$f(R, c, n)$
$f(P, c, m)$
c
P
R
m_A
n_A
u_A

Für *symmetrische* Verhandlungsspiele sind Nash- und Kalai-Smorodinsky-Lösung identisch.

Die KS-Lösung erfüllt zwar das *individuelle* Monotonie-Axiom (A.6), aber nicht das *allgemeine* Monotonie-Axiom (A.5). Wenn sich die Maximalauszahlung von Spieler i bei einer Verschiebung der Auszahlungsgrenze nach außen nicht verändert, dann wird Spieler $j \neq i$ zwar nicht benachteiligt, wohl aber kann Spieler i davon einen Nachteil haben: Es kann eine Umverteilung zugunsten des Spielers j erfolgen, dessen Maximalauszahlung sich erhöht hat.



u_B
n_B
n
R
m_B
m
$f(R, c, n)$
P
$f(P, c, m)$
c
u_A
$m_A = n_A$

- In *experimentellen* Spielen scheinen neben den Auszahlungsgrenzen und dem Konfliktpunkt auch die der Nutzenbewertung zugrunde liegenden Geldbeträge (oder andere Güter) eine Rolle zu spielen.
- Außerdem scheinen Spieler nicht nur ihren eigenen Nutzen, sondern das Spielergebnis insgesamt, also auch die „Fairness“ bezüglich der Aufteilung des Geldbetrages zu bewerten.
- Die normativen Lösungskonzepte sind daher nur begrenzt geeignet, um reales Verhalten in Verhgandlungsspielen zu beschreiben. Dies ist Funktion der behavioristischer Verhandlungsmodelle.

Ergänzende Literatur:

Wiese, H. (2005), *Kooperative Spieltheorie*. München: Oldenbourg Verlag.

Dort werden die Lösungskonzepte in einen allgemeineren Kontext eingebettet, nämlich der Frage, welche **Koalitionsbildungen** unter den Spielern möglich und sinnvoll sind. Es kann nämlich sein, dass sich nicht alle Spieler an einem Verhandlungsergebnis beteiligen müssen, auch Teilmengen der Spieler können Einigungen erzielen. Daher ist zuerst zu fragen, welche Anreize Spieler haben, bestimmte Koaltionen einzugehen. Die Nash-Lösung vergleicht lediglich das Gesamtergebnis (alle bilden eine „Große Koaltion“) mit dem Drohpunkt (jeder bildet für sich eine „Einzelkoalition“).

12. Classroom-Games – Spiele im Hörsaal

Damit sich die Teilnehmer nicht vorab informieren, sondern in den experimentellen Spielsituationen möglichst „spontan“ reagieren, wird der Inhalt dieses Abschnittes noch nicht bekannt gegeben!

13. Grundzüge der Evolutionären Spieltheorie

Gliederung:

Biologische Wurzeln der Evolutionären Spieltheorie:

- Maynard Smith, J., Price, G.R. (1973), The Logic of Animal Conflict. *Nature* 246, 15-18.
- Maynard Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press.

$\Rightarrow$ Erklärung von Verhaltensmustern in Tierpopulationen

- *Beispiel:* Kampfverhalten $\rightarrow$ Unterwerfungsgesten und Ausweichen, Verzicht auf Tötung
- *Beispiel:* Revierbildung
- Erklärung zunächst durch den Beitrag solcher Verhaltensweisen zur *Arterhaltung*. Aber:
- Das individuelle Tier hat keinen Begriff der „Art“, eine übergeordnete Form *kollektiver Rationalität* ist unplausibel. Eine genetisch bedingte Verhaltensweise, die zur Erhaltung der Art beiträgt, muss erst einmal für das Individuum selbst bzw. für die Replikation seiner Gene vorteilhaft sein.
- Spieltheorie kann helfen, die Herausbildung von (genetisch bedingten) Verhaltensweisen auf individueller Ebene zu erklären.

Klassische vs. Evolutionäre Spieltheorie:

- Die klassische Spieltheorie geht von sehr strengen Rationalitätsannahmen aus: Axiome der Nutzentheorie, Maximierungsverhalten, Common Knowledge, wechselseitige Antizipation.
- Dennoch liefert die Gleichgewichtsanalyse oft multiple Lösungen, so dass das sich letztlich einstellende Verhalten nicht vollständig prognostiziert werden kann.
- Reale Akteure sind *beschränkt rational*, wechselseitige Antizipation und konsistente Erwartungen sind selten anzutreffen, *adaptives Verhalten* und *Lernen* finden statt.
- Reales Verhalten ist teilweise durch genetische oder erworbene Dispositionen (z.B. Normen) geprägt.
- Liefert die Evolutionäre Spieltheorie eine „angemessenere" Beschreibung?

Grundlegende Annahmen:

- Spieler werden durch ihren **Genotyp** charakterisiert. Dieser legt den **Phänotyp** (Verhalten, Strategie) fest, der sich in der Interaktion mit seiner Umwelt bewähren muss.
- Sehr große **Population**: monomorph (nur ein Genotyp) – polymorph (Mischung von Genotypen)
- **Fitness:** Jeder Phänotyp und somit Genotyp (hier: Stretegie) hat eine bestimmte Fitness. Diese ist vergleichbar mit den Auszahlungen in der klassischen Spieltheorie, ist jedoch nicht als Nutzenwert zu interpretieren. Entscheidend ist die *relative* Fitness, also das Verhältnis der Fitness eines Genotyps im Verhältnis zur *durchschnittlichen* Fitness in der Population

Grundlegende Annahmen (Fortsetzung):

- **Selektion:** Die Anteile der Genotypen in einer Population verändern sich *proportional zu ihrer relativen Fitness*: Relativ erfolgreiches Verhalten führt zu überdurchschnittlich viel Nachkommen, relativ weniger erfolgreiches Verhalten führt zu weniger Nachkommen.
- **Mutation:** Neue Genotypen treten in der Population auf. Diesed können sich nur dann in der Population ausbreiten, wenn sie eine höhere relative Fitness besitzen.

Ein einzelnes Individuum (Spieler) ist durch seinen Genotyp bestimmt, d.h. hat eine feste Strategie. Die Analyse konzentriert sich daher auf die *Strategien*, nicht auf die Spieler.

Wenn aus einer großen Population zufällig ein Individuum ausgewählt wird, dann kann dieser Spieler durch eine *gemischte Strategie* charakterisiert werden, die der Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. den Anteilen) der Genotypen in der Population entspricht. Man geht daher von einer monomorphen Population aus, in der die Spieler mit einer gemischten Strategie spielen.

Wenn untersucht wird, ob ein bestimmter Genotyp (Mutante) in eine Population eindringen und sich dort ausbreiten kann, so spielt dieser Genotyp gegen einen zufällig aus der Population gezogenen Spieler (random matching), d.h. gegen eine gemischte Strategie, welche die Struktur der Population widerspiegelt.

Beispiel: Kampf um den Futterplatz – Hawk-Dove-Spiel

- Bei knapper Futterreserve V besteht die Möglichkeit, durch Androhen und ggf. Durchführung eines Kampfes („Hawk", Falke) einen Konkurrenten zu verdrängen, oder durch Ausweichen („Dove", Taube) den Kampf zu vermeiden.
- Der Ausgang eines Kampfes ist ungewiss; jeder *durchgeführte* Kampf verursacht Kosten $C > V$ (z.B. in Form von Verletzungen oder Tod).
- Wollen beide dem Kampf ausweichen, so wird die Futterressource aufgeteilt.

	H	D
H	$\frac{(V-C)}{2}, \frac{(V-C)}{2}$	$V, 0$
D	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

Eine Population nur mit reinen Strategien kann es nicht geben:

- *Nur D-Typen:* Ein H-Typ kann durch Kampfandrohung die Ressource allein beanspruchen und kann sich somit in der Population ausbreiten.
- *Nur H-Typen:* Alle Individuen fügen sich in ständigem Kampf gegenseitig einen so hohen Schaden zu, dass ein friedlicher D-Typ in der Population ausbreiten kann.

$\Rightarrow$ Welche Verteilung der Strategien (d.h. welche gemischte Strategie) ist „evolutionär stabil“?

Begriff der evolutionären Stabilität:

Eine gemischte Strategie x^* ist evolutionär stabil (ESS), wenn Folgendes gilt:

- Es gibt es keine Mutante $x \neq x^*$, die gegen x^* eine höhere Fitness erzielt als x^*. In anderen Worten: Die gemischte Strategie x^* ist beste Antwort auf sich selbst.
- Die gemischte Strategie x^* kann ihrerseits in jede andere Population eindringen und sich dort ausbreiten, die durch eine andere gemischte Strategie $x \neq x^*$ charakterisiert ist.

Für das Hawk-Dove-Spiel ist die gemischte Strategie

$$x^* = (p, 1-p) = \left(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C}\right)$$

eine ESS mit $p = V/C$ als dem Anteil der H-Genotypen, d.h. der Wahrscheinlichkeit, auf ein kampfbereites Individuum zu treffen.

Die durchschnittliche Auszahlung (Fitness) dieser ESS, also eines „durchschnittlichen Individuums" aus dieser Population, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= pp \cdot \frac{(V-C)}{2} + p(1-p) \cdot V + (1-p)p \cdot 0 + (1-p)(1-p) \cdot \frac{V}{2} \\ &= \frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{C}\right)\end{aligned}$$

Einfachere Darstellung durch Matrixschreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(V-C)}{2} & V \\ 0 & \frac{V}{2} \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} \frac{V}{C} \\ 1 - \frac{V}{C} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix}$$

Durchschnittliche Fitness der ESS:

$$(x^*)^T A x^* = \frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{C}\right)$$

(In der Literatur wird gelegentlich das Transponiert-Zeichen weggelassen.)

Sei $x = (q, 1-q)$ eine beliebige gemischte Strategie.

Wenn x auf eine evolutionär stabile x^*-Population trifft, dann erhält x die durchschnittliche Auszahlung:

$$
\begin{aligned}
x^T A x^* &= q \frac{V}{C} \frac{(V-C)}{2} + q \left(1 - \frac{V}{C}\right) V + (1-q) \left(1 - \frac{V}{C}\right) \frac{V}{2} \\
&= \frac{V}{2} \left(1 - \frac{V}{C}\right) = (x^*)^T A x^*
\end{aligned}
$$

D.h. jede (andere) gemischte Strategie x ist (ebenfalls) beste Antwotrt auf x^* und somit ist auch x^* beste Antwort auf sich selbst. Andere Strategien x haben keinen Selektionsvorteil gegenüber x^*.

Wenn umgekehrt x^* auf eine x-Population trifft, dann erhält die ESS die durchschnittliche Auszahlung:

$$(x^*)^T Ax = q\frac{V}{C}\frac{(V-C)}{2} + \frac{V}{C}(1-q)\,V + (1-q)\left(1-\frac{V}{C}\right)\frac{V}{2}$$
$$= \frac{V}{2}\left(\frac{V+C-2qC}{C}\right)$$

Im Vergleich dazu ist die durchschnittliche Auszahlung in der x-Population:

$$x^T Ax = q^2\frac{(V-C)}{2} + q(1-q)V + (1-q)^2\frac{V}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(V-q^2C)$$

Die Strategie x^* kann dann in eine x-Population erfolgreich eindringen, wenn sie eine höhere Fitness aufweist als die Population selbst, d.h. $x^T Ax - (x^*)^T Ax < 0$:

$$x^T Ax - (x^*)^T Ax = \left(-\frac{C}{2}\right)\left(q - \frac{V}{C}\right)^2 < 0$$

Nach Voraussetzung $q \neq V/C$ ist der Ausdruck stets strikt negativ, d.h. x^* kann in jede andere Population eindringen. Damit ist gezeigt, dass x^* eine ESS ist.

Die Wahrscheinlichkeit, in der Population einen Kampf zu beobachten, ist somit $prob = (V/C)^2$.

Formale Definition: Gegeben ein symmetrisches Spiel mit der Auszahlungsmatrix A. Eine gemischte Strategie x^* heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), falls:

1. $(x^*)^T A x^* \geq x^T A x^*$ für alle x und
2. Für alle $x \neq x^*$ mit $(x^*)^T A x^* = x^T A x^*$ gilt: $(x^*)^T A x > x^T A x$.

- Die erste Bedingung entspricht der Definition eines (symmetrischen) Nash-Gleichgewichts. Die zweite Bedingung besagt, dass in dem Fall, wo es andere beste Antworten x auf die ESS gibt, die ESS in eine reine x-Population erfolgreich eindringen kann.
- Daher ist ESS ein *strengeres* Kriterium als das Nash-Gleichgewicht (sog. Verfeinerung des Nash-Konzepts).

Das ESS-Gleichgewicht ist ein **statisches** Konzept. Mit „Evolution“ verbindet man jedoch einen dynamischen Prozess.

Die **Replikatordynamik** beschreibt einen solchen Prozess, bei dem sich die Anteil der Genotypen („reine Strategien“) in der Population entsprechend der relativen Fitness entwickelt.

Replikatordnymaik mit diskretem Zeitkonzept:

- Gemischte Strategie $x_t = (x_{1t}, ..., x_{nt})$ mit x_{it} als dem Anteil der reinen Strategie i (bzw. des Genotyps i) an der Population zum Zeitpunkt t. Es ist $0 \leq x_{it} \leq 1$ und $\sum_i x_{it} = 1$.
- Es ist u_{it} die Auszahlung der reinen Strategie i in t, wenn diese gegen die Population spielt: $u_{it} = (Ax_t)_i$.
- Es ist $\bar{u}_t$ die durchschnittliche Auszahlung in der Population: $\bar{u}_t = x_t^T A x_t$.
- Für alle reinen Strategien i ist die Replikatordynamik:

$$x_{it+1} = x_{it} + x_{it} \left(\frac{u_{it} - \bar{u}_t}{\bar{u}_t} \right)$$

  Bei überdurchschnittlicher Fitness $(u_{it} - \bar{u}_t > 0)$ steigt der Anteil der reinen Strategie i, bei unterdurchschnittlicher Fitness $(u_{it} - \bar{u}_t < 0)$ sinkt er.

Replikatordynamik mit stetigem Zeitkonzept:

- Umformung der diskreten Dynamik ergibt mit $\Delta t = 1$:

$$\frac{x_i(t+1) - x_i(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x_i(t)}{\Delta t} = x_i(t)\left(\frac{u_i(t) - \bar{u}(t)}{\bar{u}(t)}\right)$$

  und mit dem Grenzübergang $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i(t) = x_i(t)\left(\frac{u_i(t) - \bar{u}(t)}{\bar{u}(t)}\right)$$

  Da man nicht am Ausmaß der Veränderung, sondern nur an deren Richtung interessiert ist, wird vereinfachend der Nenner weggelassen:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)(u_i(t) - \bar{u}(t))$$

- Für jeden Anfangsvektor $x(0)$ beschreibt die Dynamik einen Zeitpfad $x(t)$. Von Interesse sind die **Fixpunkte** (stationären Lösungen, steady states) des Prozesses.

Beispiel: Hawk-Dove-Spiel mit $V = 2, C = 3$

Die Verteilung ist hier durch $x = (q, 1-q)$ gegeben. Es genügt, die Bewegung von q zu untersuchen.

Die *durchschnittliche Fitness* in der Population ist:

$$\bar{u} = q^2 \frac{2-3}{2} + q(1-q)2 + (1-q)^2 \frac{2}{2} = 1 - \frac{3}{2} q^2$$

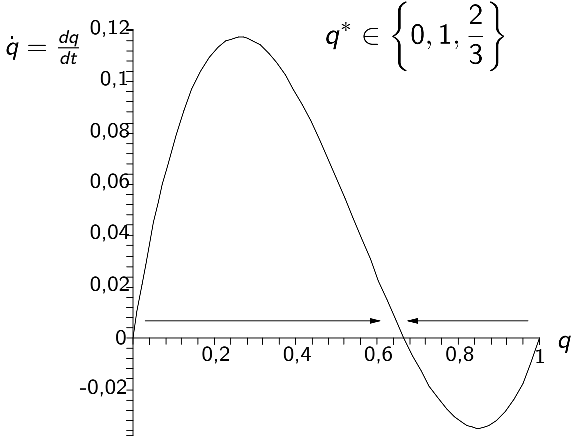
Die *Fitness des Hawk-Typs*, der mit dem Anteil q vertreten ist, beträgt:

$$u_H = q \frac{2-3}{2} + (1-q)2 = 2 - \frac{5}{2} q$$

Die Replikatordynamik ist dementsprechend:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q(u_H - \bar{u}) \\ &= \frac{1}{2} q(2 + 3q^2 - 5q) \end{aligned}$$

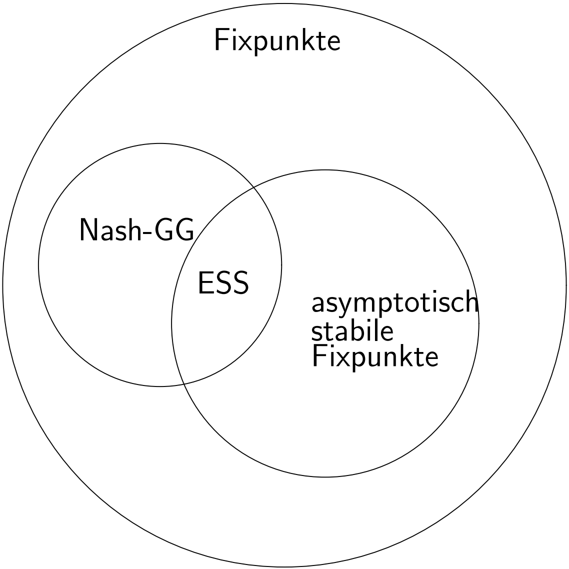
Eine stationäre Lösung (Fixpunkt) q^* ist gegeben, wenn gilt: $\dot{q} = 0$. Die Replikatordynamik des Hawk-Dove-Spiels hat drei stationäre Lösungen:



- Die stationären Lösungen $q^* = 0$ und $q^* = 1$ (monomorphe Populationen mit Doves bzw. Hawks) sind nicht stabil, wie man an der Grafik erkennen kann. Mutanten können stets in eine solche monomorphe Population eindringen und sich dort ausbreiten.
- Die stationäre Lösung $q^* = \frac{2}{3} = \frac{V}{C}$ ist hingegen *asymptotisch stabil* und entspricht dem ESS-Gleichgewicht. Offenbar konvergiert die Replikatordynamik zu diesem ESS-Gleichgewicht.

Welche Beziehungen bestehen zwischen Nash- bzw. ESS-Gleichgewichten, den Fixpunkten der Replikatordynamik und deren Stabilität?

- Jede ESS ist ein Nash-Gleichgewicht, aber nicht umgekehrt (folgt unmittelbar aus der Definition).
- Jedes Nash-Gleichgewicht ist ein Fixpunkt der Replikatordynamik. (Die Umkehrung gilt jedoch nicht.)
- Ist x^* eine ESS, dann ist x^* ein asymptotisch stabiler Fixpunkt der Replikatordynamik. Für 2×2-Matrizen A gilt zusätzlich die Umkehrung, d.h. x^* ist eine ESS genau dann wenn x^* ein Fixpunkt der Replikatordynamik ist.
- Die Existenz von ESS ist nicht sichergestellt.



Fixpunkte
Nash-GG
ESS
asymptotisch stabile Fixpunkte

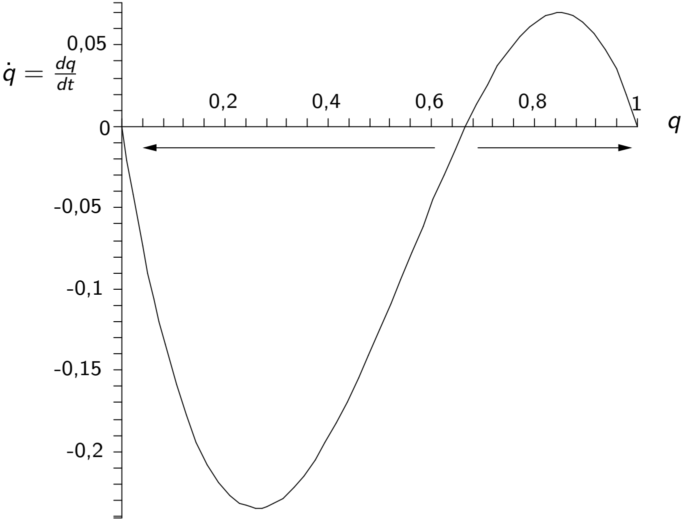
Evolutionäre Dynamik und Gleichgewichtsauswahl:

	$A\ (p)$	$B\ (1-p)$
$A\ (p)$	$1, 1$	$0, 0$
$B\ (1-p)$	$0, 0$	$2, 2$

- Durchschnittliche Auszahlung in der Population: $\bar{u} = p^2 \cdot 1 + (1-p)^2 \cdot 2$
- Durchschnittliche Auszahlung von Genotyp A: $u_A = p$
- Replikatordynamik:

$$\dot{p} = p(p \ - \ p^2 + 2(1-p)^2)$$

- Fixpunkte ($\dot{p} = 0$) liegen bei: $p^* \in \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}$
- Das gemischte Lösung ist evolutionär *in*stabil. Je nach Anfangsverteilung konvergiert die Dynamik für $0 < q < 2/3$ zu $q^* = 0$ (Typ B) und für $2/3 < q < 1$ zu $q^* = 1$ (Typ A).


0,05
$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
0
q
-0,05
-0,1
-0,15
-0,2

Erweiterungen:

- Berücksichtigung endlicher Populationsgrößen
- Asymmetrische Auszahlungsmatrizen
- Verallgemeinerte Dynamiken
- Lokale Interaktion statt random matching
- Indirekt evolutionärer Ansatz

Tauglich als *sozialwissenschaftlicher* Ansatz?

- Statt den extremen Rationalitätsanforderungen der klassischen Spieltheorie wird hier gänzlich auf Rationalität verzichtet. Die Spieler stellen keine Überlegungen an, ihr Verhalten ist „programmiert“.
- Die Replikatordynamik stellt einen expliziten Fitness-Vergleich an. Daher ist es problematisch, Fitness als präferenz-basierte Bewertung von Spielergebnissen zu interpretieren. Beschränkt rationales Verhalten sollte aber schon (zumindest auch) durch individuelle Bewertungen erklärt werden.
- Die evolutionäre Semantik von Mutation, Selektion und Reproduktion passt lediglich auf angeborene Verhaltensmuster. Für einen großen Teil des Entscheidungsverhaltens sind Anpassungsprozesse durch adaptives Verhalten und Lernen zu erklären.

Interpretation der Replikatordynamik:

Änderung der Anteile x_{it} nicht aufgrund äußeren Selektionsdrucks, sondern durch Lernen:

- Lernen durch Experimentieren und verstärkte Adaption erfolgreicher Verhaltensweisen.
- Lernen durch Imitation erfolgreicher Individuen

Literaturhinweis: Amann, E. (1999), *Evolutionäre Spieltheorie. Grundlagen und neue Ansätze*. Heidelberg: Physica.

Nicht unproblematisch!