Übungsaufgaben zur Spieltheorie

I. Grundlagen

1. Erläutern sie, was man unter einem Spiel in Normalform bei vollständiger Information versteht? Beschreiben sie verbal und formal das Lösungskonzept des Nash-Gleichgewichts.

2. Was versteht man unter schwach bzw. streng dominierten Strategien? Untersuchen sie im nachfolgenden Spiel, welche Strategien schwach und welche streng dominiert sind. Führen sie eine iterierte Elimination streng dominierter Strategien durch:

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	(1,1)	(2,2)	(3,0)
	a_2	(2,1)	(3,1)	(1,0)
	a_3	(3,0)	(2,1)	(2,-1)

3. Ermitteln sie für folgende Spiele jeweils die Nash-Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien. Stellen sie letztere graphisch dar.

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,1)	(0,0)
	a_2	(1,1)	(1,2)

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,0)	(0,1)
	a_2	(1,2)	(1,1)

4. Erläutern sie, wie ein Spielbaum aufgebaut ist. Was versteht man unter einem Informationsbezirk? Was bezeichnet man als Teilspiel?

II. Cournot-Oligopol-Spiele

Auf einem Markt mit einem homogenen Gut sei eine Duopol-Situation gegeben. Es seien x_1, x_2 die angebotenen Mengen von Unternehmen 1 und 2 mit $x = x_1 + x_2$. Die aggregierte Nachfragefunktion sei $p(x) = 60 - x$ mit p als einheitlichem Preis des Gutes. Die Kostenfunktionen der beiden Unternehmen seien

$$K_1(x_1) = 300 + x_1 \qquad \text{und} \qquad K_2(x_2) = 100 + 0.5x_2^2$$

1. Emitteln sie die Reaktionsfunktionen und stellen sie diese graphisch dar. Ermitteln sie die Cournot-Nash-Lösung.

2. Beide Unternehmen beschließsen ein Kartell, bei dem sie die bisher angebotenen Mengen um einen bestimmten Prozentsatz reduzieren, um so einen höheren Preis und Gewinn zu erzielen. Begründen sie, ob eine solche Kartellabsprache von beiden eingehalten werden wird (keine formale Herleitung).

III. Bertrand-Oligopol-Spiele

Wir gehen von einem Markt mit zwei inhomogenen Gütern aus. Es herrsche eine Duopol-Situation. Die aggregierten Nachfragefunktionen seien

$$x_1(p_1, p_2) = 20 - 2p_1 + p_2$$
$$x_2(p_1, p_2) = 20 - p_2 + 0.5p_1$$

Die Kostenfunktionen der beiden Unternehmen seien

$$K_1(x_1) = 5 + 2x_1 \qquad \text{und} \qquad K_2(x_2) = 8 + 2x_2$$

1. Leiten sie die Reaktionsfunktionen für die Preissetzung her. Bestimmen sie die Bertrand-Nash-Lösung. Welche Mengen x_1, x_2 werden im Gleichgewicht angeboten? Welche Gewinne werden realisiert?

2. Stellen sie die Reaktionsfunktionen und die Lösung des Spiels graphisch dar.

IV. Stackelberg-Gleichgewicht

1. Gehen sie von derselben Situation aus wie in Aufgabe II. Ermitteln sie die Stackelberg-Lösungen für die den Fall, dass Unternehmen 1 der Stackelberg-Führer (Unabhängigkeitsposition) ist.

2. Gehen sie von derselben Situation aus wie in Aufgabe II. Berechnen sie die Bowley-Lösung und die entsprechenden Gewinne.

3. Gehen sie von der Situation aus wie in Aufgabe III. Unterstellen sie, dass Unternehmen 1 zuerst den Preis setzt und anschließend Unternehmen 2. Ermitteln sie die Preise und Gewinne. Vergleichen sie das Ergebnis mit dem Cournot-Stackelberg-Fall.

V. Teilspielperfektheit

1. Was versteht man unter einem teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht?

2. Gegeben sei folgendes Stufenspiel:

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	(1,1)	(2,2)	(2,1)
	a_2	(2,0)	(4,1)	(1,0)
	a_3	(3,1)	(2,1)	(2,-1)

Das Stufenspiel werde einmal wiederholt. Betrachten sie folgende Strategienkombination: "Spiele in der ersten Runde (a_1, b_2). Falls in der ersten Runde (a_1, b_2) gespielt wurde, dann spiele in der zweiten Runde (a_2, b_2) und (a_1, b_3) sonst." Stellen sie das One-Shot-Game auf. Ist die angegebene Strategienkombination teilspielperfekt? (mit Begründung)

3. Gegeben sei eine Gefangenendilemma-Situation mit folgenden Auszahlungen:

		B	
		K	D
A	K	(5,5)	(2,7)
	D	(7,2)	(3,3)

   Betrachten sie folgende Triggerstrategie: "Beginne mit K. Spiele dann K, falls in den Vorperioden stets (K, K) gespielt wurde, und ansonsten D."

   (a) Erläutern sie allgemein, was man unter einer Triggerstrategie versteht.

   (b) Bei welchem Diskontsatz für zukünftige Gewinne wird stets K gespielt?

   (c) Begründen sie verbal, weshalb bei dem errechneten Diskontsatz die oben genannte Triggerstrategie teilspielperfekt ist.

VI. Spiele mit unvollständiger Information

1. Charakterisieren sie die Eigenschaften eines Spiels mit unvollständiger Information. Erläutern sie verbal und formal das Lösungskonzept des Bayes-Nash-Gleichgewichts.

2. Beim Verkauf eines Unternehmens gibt es zwei Kaufinteressenten (Bieter in einer Auktion). Der geschätzte Marktwert des Unternehmens liege zwischen 0 Mrd. und 1 Mrd. DM. Jeder Interessent wird höchstens soviel bieten, wie ihm das Unternehmen wert erscheint. Da die Wertschätzungen der Mitbieter nicht bekannt sind, geht jedes Unternehmen von einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ aus. Bestimmen sie analytisch die optimale Höhe des Gebotes eines Interessenten. (Wie ändert sich das optimale Gebot, wenn ein weiterer Bieter hinzukommt?)