Übungsaufgaben zur Spieltheorie

1. Erläutern sie, was man unter einem Spiel bei vollständiger Information versteht.
2. Erläutern Sie kurz die Annahme, dass sich die Spieler *rational* verhalten.
3. Beschreiben sie verbal und formal das Lösungskonzept des Nash-Gleichgewichts. Warum muss die Lösung selbststabilisierend sein?
4. Was versteht man unter schwach bzw. streng dominierten Strategien? Weshalb können streng dominierte Strategien aus der Strategiemenge eliminiert werden?
5. Beschreiben Sie kurz in allgemeiner Form das „Gefangenendilemma“. Diskutieren Sie die Lösung des Spiels, (a) falls beide Spieler vorher (unverbindlich) kommunizieren können, (b) der eine Spieler zuerst entscheidet und dies vom anderen Spieler beobachtet wird.

6. Untersuchen sie im nachfolgenden Spiel, welche Strategien schwach und welche streng dominiert sind. Führen sie eine wiederholte Elimination streng dominierter Strategien durch:

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	(1,1)	(2,2)	(3,0)
	a_2	(2,1)	(3,1)	(1,0)
	a_3	(3,0)	(2,1)	(2,-1)

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

7. Ermitteln sie für folgende Spiele jeweils die Nash-Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien. Stellen sie letztere grafisch dar.

Spiel I		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,1)	(0,0)
	a_2	(1,1)	(1,2)

Spiel II		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(1,0)	(0,1)
	a_2	(1,2)	(1,1)

8. Erläutern sie, wie ein Spielbaum aufgebaut ist. Was versteht man unter einem Informationsbezirk? Stellen Sie Spiel I aus der vorigen Aufgabe als Spielbaum dar. Gehen Sie davon aus, dass beide Spieler simultan ihre Strategien wählen.

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

9. Gegeben sei ein Duopol-Markt für ein homogenes Gut. Die Nachfragefunktion sei $p(x) = 60 - x$ mit p als einheitlichem Preis des Gutes und $x = x_1 + x_2$. Die Kostenfunktionen seien

$$K_1(x_1) = 300 + x_1 \qquad \text{und} \qquad K_2(x_2) = 100 + 0.5x_2^2$$

   a) Emitteln sie die Reaktionsfunktionen und stellen sie diese grafisch dar. Ermitteln sie die Cournot-Nash-Lösung.
   b) Beide Unternehmen beschließsen ein Kartell, bei dem sie die bisher angebotenen Mengen um einen bestimmten Prozentsatz reduzieren, um so einen höheren Gewinn zu erzielen. Begründen sie, ob eine solche Kartellabsprache eingehalten werden wird (keine formale Herleitung).
   c) Unternehmen 1 kann für zusätzliche Fixkosten in Höhe von 150 ein Patent anmelden, welches Unternehmen 2 zwingt auf eine Technologie auszuweichen, die ebenfalls um 150 Einheiten höhere Fixkosten verursacht. Wird Unternehmen 1 diese Patentstrategie einsetzen?

10. Gehen Sie von einem Markt mit zwei inhomogenen Gütern aus. Es herrsche eine Duopol-Situation. Die aggregierten Nachfragefunktionen seien

$$x_1(p_1, p_2) = 20 - 2p_1 + p_2$$
$$x_2(p_1, p_2) = 20 - p_2 + 0.5p_1$$

Die Kostenfunktionen der beiden Unternehmen seien

$$K_1(x_1) = 5 + 2x_1 \qquad \text{und} \qquad K_2(x_2) = 8 + 2x_2$$

a) Leiten sie die Reaktionsfunktionen für die Preissetzung her. Bestimmen sie die Bertrand-Nash-Lösung. Ermitteln Sie die Mengen sowie Gewinne im Gleichgewicht.
b) Stellen sie die Reaktionsfunktionen und die Lösung des Spiels grafisch dar.

11. Beschreiben Sie das strategische Anreizproblem bei der Erstellung öffentlicher Güter anhand der folgenden Auszahlungsfunktion:

$$u_i(g_i, g_{-i}) = 10 - g_i + 0.5 \cdot \sum_{j=1}^{20} g_j \qquad i = 1, ..., 20$$

mit $g_i \in [0, 10]$ als Strategievariable. Zeigen Sie, dass hier die Nash-Lösung pareto-ineffizient ist.

12. Erläutern Sie die Begriffe Gesamtspiel und Teilspiel.
13. Beschreiben Sie das Lösungskonzept des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichtes. Weshalb ist Teilspielperfektheit eine Implikation der Rationalitätsannahme?
14. Was ist eine Rückwärtsinduktion? Weshalb sind alle durch Rückwärtsinduktion ermittelten Gleichgewichte teilspielperfekt?
15. Petra macht einen Vorschlag, wie ein Geldbetrag M auf sie selbst und Knut aufgeteilt werden soll: $(\delta M, (1-\delta)M),\ \delta \in [0,1]$. Anschließend kann Knut diesem Vorschlag zustimmen oder nicht. Im ersten Fall wird der Vorschlag realisiert, im zweiten Fall erhalten beide nichts. Zeichnen Sie den Spielbaum, und lösen Sie das Spiel durch Rückwärtsinduktion.

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

16. Gehen Sie von derselben Situation aus wie in Aufgabe 9. Ermitteln sie die Stackelberg-Lösungen für den Fall, dass Unternehmen 1 der Leader ist.
17. Gehen Sie von derselben Situation aus wie in Aufgabe 9. Berechnen sie die Mengen im Bowley-Szenario und die entsprechenden Gewinne.
18. Gehen Sie von derselben Situation aus wie in Aufgabe 10. Unterstellen sie, dass Unternehmen 1 zuerst den Preis setzt und anschließend Unternehmen 2. Ermitteln sie die Preise und Gewinne.
19. Vergleichen Sie die Gewinne der Bertrand-Stackelberg-Lösung (Aufgabe 18) mit den Gewinnen der Bertrand-Lösung (Aufgabe 10). Ist es strategisch günstig, durch möglichst frühzeitige Preissetzung in eine Leader-Position zu gelangen?

20. Die Privatwirtschaft bildet Inflationserwartungen π^e, die als strategische Variable betrachtet werden. Die Nutzenfunktion der Privatwirtschaft sei gegeben durch $u_W = -(\pi - \pi^e)^2$ mit π als der tatsächlichen Inflationsrate. Der Zusammenhang von Inflation und Arbeitslosigkeit sei durch folgende Phillipskurve beschrieben: $A = A_n - (\pi - \pi^e)$ mit A, A_n als (natürlicher) Arbeitslosenrate. Die Zentralbank kann über ihre Geldpolitik die tatsächliche Inflationsrate π festsetzen. Ihre Zielfunktion sei gegeben durch $u_Z = -\pi^2 - A^2$. Der Spielaufbau sei sequenziell: Zuerst bildet die Privatwirtschaft Inflationserwartungen π^e, anschließend legt die Zentralbank die Geldmenge und somit die tatsächliche Inflationsrate π fest. Begründen Sie formal und verbal, weshalb die Ankündigung der volkswirtschaftlich *optimalen* Inflationspolitik von $\pi = 0$ *zeitinkonsistent* ist. Ermitteln Sie die Inflationsrate, die sich bei einer teilspielperfekten Lösung einstellen wird.

21. Gegeben sei ein Gesamtspiel $G(T, \delta)$. Erläutern Sie, um was für eine Art von Spiel es sich handelt.
22. Gegeben sei das Spiel $G(T = 2, \delta = 0)$ mit folgendem Basisspiel:

G		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	(1,1)	(2,2)	(2,1)
	a_2	(2,0)	(4,1)	(1,0)
	a_3	(3,1)	(2,1)	(2,-1)

a) Wieviele Teilspiele hat das Spiel?
b) Wieviele Strategien umfasst der Strategieraum jedes Spielers?
c) Betrachten sie folgende Strategienkombination: „Spiele in der ersten Runde (a_1, b_2). Falls in der ersten Runde (a_1, b_2) gespielt wurde, dann spiele in der zweiten Runde (a_2, b_2) und (a_3, b_1) sonst." Stellen sie das One-Shot-Game auf. Ist die angegebene Strategienkombination teilspielperfekt? (mit Begründung)

23. Gegeben sei folgendes Dilemma-Spiel:

		B	
		K	D
A	K	(5,5)	(2,7)
	D	(7,2)	(3,3)

Betrachten sie folgende Triggerstrategie: „Beginne mit K. Spiele dann K, falls in den Vorperioden stets (K, K) gespielt wurde, und ansonsten D."

a) Erläutern sie allgemein, was man unter einer Triggerstrategie versteht.
b) Bei welchem Diskontsatz für zukünftige Gewinne wird stets K gespielt?
c) Begründen sie verbal, weshalb bei dem errechneten Diskontsatz die oben genannte Triggerstrategie teilspielperfekt ist.

24. Erläutern Sie die Aussage des Folk-Theorems.
25. Gegeben sei folgendes Basisspiel. Zeichnen Sie für $G(\infty, \delta)$ die durchschnittlichen Auszahlungen $V_\emptyset$ für A und B in ein Diagramm.

		B	
		K	D
A	K	(4,4)	(0,5)
	D	(6,0)	(2,1)

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

26. Kann es für das Basisspiel aus Aufgabe 23 auch für eine endlich häufige Wiederholung eine teilspielperfekte Triggerstrategie geben, die zumindest zeitweise zu kooperativem Verhalten führt? (mit Begründung)
27. Erläutern Sie das sog. „Handelsketten-Paradoxon".
28. Wirtschaftspolitik ist häufig durch das Zeitinkonsistenzproblem gekennzeichnet. Das Folk-Theorem eröffnet die Möglichkeit, einen kollektiv effizienten Zustand durch Triggerstrategien herzustellen. Erörtern Sie die Schwierigkeit, die sich dabei für demokratisch legitimierte Träger der Wirtschaftspolitik ergibt.

29. Charakterisieren sie die Eigenschaften eines Spiels mit unvollständiger Information. Erläutern sie verbal und formal das Lösungskonzept des Bayes-Nash-Gleichgewichts.
30. Weshalb sind Bayes-Nash-Gleichgewichte lediglich ax-ante selbststabilisierend?
31. Was versteht man unter der Common-Prior-Annahme? Aus welchem Grund wird diese Annahme häufig getroffen?

32. Bei der Versteigerung einer Mobilfunklizenz gibt es zwei Interessenten. Der geschätzte Ertragswert dieser Lizenz liege zwischen 0 Mrd. und 1 Mrd. Euro. Jeder Interessent wird höchstens soviel bieten, wie ihm die Lizenz wert erscheint. Da die Wertschätzungen der Mitbieter nicht bekannt sind, geht jedes Unternehmen von einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ aus. Bestimmen sie analytisch die optimale Höhe des Gebotes eines Interessenten. Wie ändert sich das optimale Gebot, wenn ein weiterer Bieter hinzukommt?

33. Gegeben sei ein Markt für ein homogenes Gut mit zwei Anbietern $i = 1, 2$. Die inverse Nachfragefunktion sei gegeben durch $p(x) = 20 - x$. Die Kostenfunktionen seien gegeben durch $K_i(x_i) = c_i x_i$. Für Unternehmen 1 gelte $c_1 = 2$. Die Grenzkosten von Unternehmen 2 seien dessen private Information. Der Typenraum sei $T_2 = \{c_2 = 2, c_2 = 4\}$, die Vermutungen von Unternehmen 1 bezüglich des Typs seien $p = 0.5$ für beide Typen. Ermitteln Sie die Bayes-Nash-Lösung für den Fall, dass $c_2 = 4$ vorliegt.
34. Skizzieren Sie das Grundproblem beim „Market for Lemons“. Erläutern Sie Möglichkeiten, die Informationsasymmetrie zu überwinden.

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

35. Erläutern Sie den Unterschied von kooperativer und nicht-kooperativer Spieltheorie. Weshalb bedarf es in beiden Fällen unterschiedlicher Lösungskonzepte?
36. Erläutern Sie grafisch und verbal die Nash-Verhandlungslösung und deren Eigenschaften. Gehen Sie dabei kurz auf die Begriffe Auszahlungsraum, Verhandlungsproblem und Paretogrenze ein. Zeigen Sie grafisch, dass die Nash-Verhandlungslösung das Monotonieaxiom verletzen kann.
37. Erläutern Sie anhand einer Grafik die Verhandlungslösung nach Kalai/Smorodinsky.
38. Betrachten Sie eine Verhandlung, bei der ein Geldbetrag M auf zwei Verhandlungspartner aufzuteilen ist. Illustrieren Sie die Nash- und die Kalai/Smorodinsky-Lösung für diesen Fall. Erläutern Sie kurz das Ergebnis.

39. Erläutern Sie das Lösungskonzept der Evolutionär Stabilen Strategien (ESS).
40. Beschreiben Sie formal und verbal die einfache Replikatordynamik für ein diskretes Zeitkonzept. Kann ein ESS-Gleichgewicht stets durch eine Replikatordynamnik (asymptotisch) erreicht werden?
41. Gegeben sei folgendes Spiel. Stellen Sie die Replikatordynamik auf, und ermitteln Sie die ESS-Gleichgewichte.

	$A\ (p)$	$B\ (1-p)$
$A\ (p)$	$1,1$	$0,0$
$B\ (1-p)$	$0,0$	$3,3$

Übungsaufgaben zur Spieltheorie

42. Diskutieren Sie kritisch, inwiefern sich die Evolutinäre Spieltheorie eignet, beschränkt rationales Verhalten von Spielern abzubilden.
43. Diskutieren Sie einige Vor- und Nachteile der experimentellen Spieltheorie zur Untersuchung realen strategischen Verhaltens.
44. „Die experimentellen Ergebnisse des Ultimatum-Spiels zeigen, dass sich die Spieler lediglich beschränkt rational verhalten.“ Nehmen Sie zu dieser Aussage (kritisch) Stellung.
45. Skizzieren Sie die Grundidee des „indirekt evolutionären Ansatzes“.
46. Diskutieren Sie, inwiefern die Bindung an Normen bei Koordinations- und Dilemmaspielen sinnvoll sein kann.