Friedrich-Schiller-Universität Jena
Wirtschftswissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre / Makroökonomik
PD Dr. Markus Pasche

Musterlösung zur Credit-Point-Klausur "Spieltheorie"

Wintersemester 2004/2005

Zu Aufgabe 1:

Gewinnfunktion von Unternehmen i maximieren:

$$
\begin{aligned}
G_i(p_i, p_j) &= (20 - 2p_i + p_j)(p_i - 2) = 24p_i - 2p_i^2 + p_ip_j - 40 - 2p_j \\
\frac{\partial G_i}{\partial p_i} &= 24 - 4p_i + p_j = 0 \quad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow \qquad p_i = R_i(p_j) &= 6 + \frac{1}{4}p_j \quad \text{(Reaktionsfunktion)}
\end{aligned}
$$

Wegen Symmetrie gilt im Gleichgewicht

$$
\begin{aligned}
p_j = p_i &= 6 + \frac{1}{4}p_j \\
\Rightarrow \qquad p_j &= 8 \quad \Rightarrow \quad p_i = 8
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe 2:

Barwert der Auszahlungen bei Kooperation:

$$V^K = 5 + \delta 5 + \delta^2 5 + ... = \frac{1}{1-\delta}5$$

Barwert der Auszahlungen bei einmaligem Bruch der Kooperation gemäß Triggerstrategie:

$$V^D = 7 + \delta 3 + \delta^2 3 + ... = 7 + \frac{\delta}{1-\delta}3$$

Die Kooperation wird eingehalten, wenn $V^K \geq V^D$, also

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\delta}5 &\geq 7 + \frac{\delta}{1-\delta}3 \\
5 &\geq 7(1-\delta) + \delta 3 = 7 - 4\delta \\
\Rightarrow \qquad \delta &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Die Triggerstrategie empfiehlt für alle Teilspiele, in deren Vorgeschichte stets (K, K) gespielt wurde, weiterhin K zu spielen. Dies ist bei $\delta \geq 0.5$ eine gleichgewichtige Empfehlung (kein Anreiz abzuweichen), weil $V^K \geq V^D$. Bei allen anderen Teilspielen empfiehlt die Triggerstrategie für immer D zu spielen. Da D die beste Antwort auf D ist, besteht auch hier kein einseitiger Aneeiz zum Abweichen. Folglich wird in allen Teilspielen ein Nash-GG empfohlen. Zu Spielbeginn empfiehlt die Triggerstrategie, mit K zu beginnen. Dies ist wegen derselben Überlegung, dass $V^K \geq V^D$ gilt, gleichgewichtig, so dass auch dieser Empfehlung gefolgt wird. Demnach ist die Triggerstrategie teilspieperfekt.

Zu Aufgabe 3:

Einsetzen der Phillipskurve in die Zielfunktion der Zentralbank ergibt:

$$u_Z = -\pi^2 - (A_n - \pi + \pi^e)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{du_Z}{d\pi} &= -2\pi + 2(A_n - \pi + \pi^e) \quad \text{(innere Abl. $\cdot$ äußere Abl.!)} \\ &= -4\pi + 2(A_n + \pi^e) = 0 \quad \text{(BEO)} \\ \Rightarrow \qquad \pi = R_Z(\pi^e) &= \frac{1}{2}(A_n + \pi^e) \quad \text{(Reaktionsfunktion)} \end{aligned}$$

Diese beste Antwort auf die Inflationserwartungen kann die Wirtschaft jedoch antizipieren. Aus der Maximierung ihrer Zielfunktion $u_W = -(\pi - \pi^e)^2$ ergibt sich als beste Antwort $\pi^e = \pi$. Antizipiert also die Wirtschaft die Inflationspolitik $\pi = R_Z(\pi^e)$, so ergibt sich die gleichgewichtige erwartete Inflationsrate

$$\begin{aligned} \pi^e &= \frac{1}{2}(A_n + \pi^e) \\ \Rightarrow \qquad \pi^e &= A_n \end{aligned}$$

und Einsetzen von $\pi^e = A_n$ in die Reaktionsfunktion R_Z ergibt natürlich $\pi = A_n$. Die optimale Inflationsrate wäre allerdings $\pi = \pi^e = 0$. Würde die Zentralbank diese ankündigen, dann wüsste die Privatwirtschaft, dass die Zentralbank im Fall von $\pi^e = 0$ einen Anreiz hätte, eben von dieser gesamtwirtschaftlich optimalen Inflationsrate abzuweichen, denn $\pi = R_Z(0) = \frac{1}{2}A_n > 0$. Eine solche angekündigte Politik würde also nicht realisiert und ist somit zeitinkonsistent.

Zu Aufgabe 4:

Gegeben sei ein symmetrisches Spiel mit der Auszahlungsmatrix A. Die einzelnen Spieler sind „genetisch" jeweils auf eine reine Strategie $s_i \in \{s_1, ..., s_n\}$ festgelegt. Es sei x_i der Anteil der Spieler an der (großen) Population, welcher die reine Strategie s_i spielt. Ein zufällig aus der Population ausgewählter Spieler wird demnach durch eine gemischte Strategie $x = (x_1, ..., x_n)$ charakterisiert, welche die Verteilung reinen Strategien in der Population repräsentiert. Die durchschnittliche Auszahlung eines Spielers aus einer x spielenden Population ist demnach xAx. Eine gemischte Strategie x^* ist eine evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn kein Mutant $x \neq x^*$ in eine x^* spielende Population eindringen kann, d.h. wenn x^* bereits beste Antwort auf sich selbst ist (also ein Nash-Gleichgewicht). Falls jedoch ein $x \neq x^*$ existiert, welches *ebenfalls* beste Antwort auf x^* ist, dann kann x^* in eine x spielende Population eindringen und somit x verdrängen (aber eben nicht umgekehrt). Die zweite *zusätzliche* Bedingung impliziert, dass das ESS-Konzept strenger ist als die Nash-Gleichgewichtsbedingung. Daher ist jedes ESS-Gleichgewicht (per Definition) stets ein Nash-Gleichgewicht, aber nicht umgekehrt.

Formal: Es ist x^* eine ESS, wenn gilt:

1. Es ist $x^*Ax^* \geq xAx^*$ für alle x (Nash-Gleichgewichtsbedingung),

2. Falls ein $x \neq x^*$ existiert mit $x^*Ax^* = xAx^*$, dann gilt: $x^*Ax > xAx$ (zusätzliche Stabilitätsbedigung).