Lösungshinweise zur Credit-Point-Klausur “Spieltheorie”

Wintersemester 2003/2004

1. Zwei Anbieter auf einem Markt mit einem homogenen Gut.

   a) Ermittlung der Reaktionsfunktionen:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (a - x_1 - x_2)x_1 - cx_1 - K^{fix} \\
&= ax_1 - x_1^2 - x_1x_2 - cx_1 - K^{fix} \\
\frac{dG_1}{dx_1} &= a - 2x_1 - x_2 - c = 0 \qquad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow \quad x_1 &= \frac{a - c - x_2}{2} = R_1(x_2) \\
\Rightarrow \quad x_2 &= \frac{a - c - x_1}{2} = R_2(x_1) \qquad \text{aus Symmetriegründen}
\end{aligned}
$$

   Cournot-Nash-Lösung = Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen:

$$
\begin{aligned}
a - 2x_1 - c &= \frac{a - c - x_1}{2} \\
2a - 4x_1 - 2c &= a - c - x_1 \\
a - c &= 3x_1 \\
\Rightarrow \quad x_1^* &= \frac{a - c}{3} = x_2^*
\end{aligned}
$$

   Entsprechend ist der Gewinn:

$$
G_1 = \left(a - 2\frac{(a-c)}{3}\right)\frac{(a-c)}{3} - c\frac{(a-c)}{3} - K^{fix} = \frac{(a-c)^2}{9} - K^{fix} = G_2
$$

   b) Bowley-Szenario = Jeder Anbieter verhält sich so, als sei er im Stackelberg-Szenario in der Unabhängigkeitsposition:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \left(a - x_1 - \underbrace{\frac{(a - c - x_1)}{2}}_{R_2(x_1)}\right)x_1 - cx_1 - K^{fix} \\
&= ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{(a-c)}{2}x_1 - cx_1 - K^{fix} \\
\frac{dG_1}{dx_1} &= a - x_1 - \frac{(a-c)}{2} - c = 0 \qquad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow \quad x_1^s &= \frac{a-c}{2}
\end{aligned}
$$

   Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für Unternehmen 2 und die Bowley-Lösung ist $(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{2})$.

c) In der Aufgabenstellung war nicht ganz klar, ob sich die Zahlenwerte auf a) oder b) beziehen. Für die Logik der Argumentation ist das jedoch ohne Bedeutung.

Fall a):

$$x_1^* = \frac{20-2}{3} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = x_1 + x_2 = 12$$
$$G_1 = (20-12)\cdot 6 - 2\cdot 6 - 40 = -4 \quad \text{(Verlust)}$$

Fall b) (alternativ!)

$$x_1^s = \frac{20-2}{2} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x = x_1 + x_2 = 18$$
$$G_1 = (20-18)\cdot 9 - 2\cdot 9 - 40 = -40 \quad \text{(Verlust)}$$

Bei kostenlosem Marktaustritt wäre der Gewinn $G_i = 0$, folglich besteht für (mindestens) *ein* Unternehmen ein *Anreiz*, den Markt zu verlassen.

Das am Markt verbleibende Unternehmen kann sich dann allerdings als *Monopolist* verhalten und bietet die Monopolmenge an:

$$G = (20-x)x - 2x - 40$$
$$\frac{dG}{dx} = 20 - 2x - 2 = 0 \quad \text{(BEO)}$$
$$\Rightarrow \quad x^* = 9 \qquad (\Rightarrow G = 41 > 0)$$

2. Dominanzbeziehungen:

a) Eine Dominanzbeziehung kann sich nur aus einem *paarweisen Vergleich* zwieer Strategien ergeben.

Eine Strategie s_i wird von s_i^* *streng* dominiert, wenn sie für alle Satretgiekombinationen der Gegenspieler stets zu geringeren Auszahlungen führt als s_i^*. Formal:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i^*, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}$$

Eine Strategie s_i wird von s_i^* *schwach* dominiert, wenn sie für alle Satretgiekombinationen der Gegenspieler stets zu geringeren (in mindestens einem Fall)oder gleich hohen Auszahlungen führt als s_i^*. Formal:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}$$

und "$<$" für mindestens ein s_{-i}.

b) Für die gegebene Auszahlungsmatrix gelten folgende Beziehungen:

1. Runde: $a_2 \succeq a_1, a_2 \succeq a_3, b_1 \succeq b_3, b_2 \succ b_3$ Strategie b_3 wird eliminiert.

2. Runde: $a_1, a_2 \succ a_3$. Strategie a_3 wird eliminiert.

3. Runde: $b_2 \succ b_1$. Strategie b_1 wird eliminiert.

4. Runde: $a_2 \succ a_1$. Strategie a_1 wird eliminiert und (a_2, b_2) ist das einzige verbleibende Feld (zugleich die Nash-Lösung).

c) Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategievektor (s_i^*, s_{-i}^*), für den gilt:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i,\ \forall i$$

Wäre für s_i^* die strenge Dominanzbeziehung für ein $s_i \in S_i$ erfüllt, so würde s_i *für alle* s_{-i} und somit *auch* für s_{-i}^* zu höheren Auszahlungen führen. Dann wäre aber s_i^* offenbar keine beste Antwort mehr auf s_{-i}^* und kann folglich nicht die Definition des Nash-Gleichgewichtes erfüllen. [alternative Argumentationen sind möglich]

3. Hinweis: Die Aussage des Folk-Theorems (Friedman [1971]) findet sich im Skript in Abschnitt 3.3.2.

   Eine Triggerstrategie kündigt das für beide Seiten vorteilhafte Verhalten (Kooperation) an. Bei bisheriger Kooperation verspricht sie auch künftig kooperatives Verhalten, im Fall einer Abweichung ("Trigger" = Auslöser) wird mit der für beide unvorteilhaften Nash-Lösung des Stufenspiels für alle künftigen Perioden gedroht. Da diese Drohung glaubwürdig ist, erzeugt sie (bei hinreichend großem Diskontfaktor) einen Anreiz zur Beibehaltung der Kooperation.

4. Bei unvollständiger Information ist mindestens ein *Charakteristikum* eines Spielers, z.B. dessen Auszahlungsfunktion, nicht mehr gemeinsames Wissen, sondern privates Wissen des betrefenden Spielers. Das den anderen Spielern unbekannte Charakteristikum wird *typologisiert*, d.h. mögliche Ausprägungen werden als unterschiedliche Spielrtypen t_i dargestellt. Jeder Spieler kennt seinen eigenen Typ und stellt *Vermutungen* über die Typen der anderen Spieler an, die in Form von *Wahrscheinlichkeitserwartungen* $p(t_{-i}|t_i)$ modelliert werden. Die Auszahlungen hängen nun nicht mehr allein von der Strategiewahl, sondern auch von der Typverteilung ab. Jeder Spieler maximiert nun seine *erwartete* Auszahlung.

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben 1a) und 1b) entsprechen bis auf die zusätzlichen Fixkosten genau den Ausführungen im Skript. Teil 1c) beinhaltet eine kleine Transferleistung, wobei der Hinweis in der Aufgabenstellung auf den kostenlosen Marktaustritt ein wichtiger Tipp ist.
- Die Aufgaben 2a) und 2b) entsprechen den Ausführungen im Skript und wurden in sehr ähnlicher Form (andere Zahlenwerte) geübt. Aufgabe 2c) ist eine geringfügige Transferleistung, die sich unmittelbar aus der korrekten formalen Definition des Nash-Gleichgewichtes und der strengen Dominanz ergibt.
- Die Aufgaben 3 und 4 entsprechen den Ausführungen im Skript und sind weitestgehend geübt worden.