Lösungshinweise zur Credit-Point-Klausur "Spieltheorie" (Variante b)

Sommersemester 2006

Aufgabe 1:

Gewinnfunktion von Unternehmen i:

$$\begin{aligned} G_i(p_i, p_j) &= (10 - p_i + 0.5p_j)(p_i - 1) - 1, \quad j \neq i \\ &= 11p_1 - 11 - p_i^2 + 0.5p_i p_j - 0.5p_j \end{aligned}$$

Maximierung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial p_i} &= -2p_i + 11 + 0.5p_j = 0 \qquad \text{(BEO)} \\ \Rightarrow \quad p_i^* &= 5.5 + 0.25p_j = R_i(p_j) \\ \Rightarrow \quad p_j^* &= 5.5 + 0.25p_i = R_j(p_i) \quad \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen:

$$\begin{aligned} 4p_i - 22 &= 5.5 + 0.25p_i \\ 3.75p_i &= 27.5 \\ \Rightarrow \quad p_i^* &= 7\frac{1}{3} = p_j^* \quad \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Eine Strategie s_i wird von s_i^* streng dominiert, wenn die Auszahlungen u_i bei Wahl von s_i für alle Strategiekombinationen der anderen Spieler stets geringer sind als bei s_i^*:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i^*, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Für rationale Spieler ist es niemals vorteilhaft eine streng dominierte Strategie zu wählen. Bei vollständiger Information ist diese Tatsache gemeinsames Wissen. Bei ihrer Strategiewahl werden die anderen Spieler berücksichtigen, dass Spieler i niemals die streng dominierte Strategie wählt usw. Das Spiel hängt also nicht von der Existenz der streng dsominierten Strategie ab. Diese kann somit gestrichen werden. Dadurch wird es möglich, dass nun auch andere Spieler streng dominierte Strategien besitzen, für die dasselbe gilt.

Aufgabe 3:

Eine gemischte Strategie x^* ist evolutionär stabil (ESS), wenn Folgendes gilt:

- Es gibt es keine Mutante $x \neq x^*$, die gegen x^* eine höhere Fitness erzielt als x^*. Die gemischte Strategie x^* ist also beste Antwort auf sich selbst.
- Die gemischte Strategie x^* kann ihrerseits in jede andere Population eindringen und sich dort ausbreiten, die durch eine andere gemischte Strategie $x \neq x^*$ charakterisiert ist.

Da die erste Bedingung ein (symmetrisches) Nash-Gleichgewicht darstellt, ist aufgrund der zweiten Bedingung das Lösungskonzept der ESS *strenger* als das Nash-Gleichgewicht. Eine ESS ist stets ein asymptotisch stabiler Fixpunkt der Replikatordynamik (aber nicht umgekehrt).

Aufgabe 3:

Spieler A:

$$\begin{aligned} &q1 + (1-q)2 = q2 + (1-q)0 \\ &\Rightarrow \quad q = 2/3 \end{aligned}$$

Spieler B:

$$\begin{aligned} p1 + (1-p)1 &= p0 + (1-p)1 \\ \Rightarrow \quad p &= 0 \end{aligned}$$

Spieler B ist nur bei $p = 0$ indifferent zwischen b_1 und b_2, weil b_2 von b_1 schwach dominiert wird! Nash-Gleichgewichte liegen also vor für $p = 0$ und $q \in [2/3, 1]$. Es gibt ein Kontinuum (unendlich viele) Nash-Gleichgewichte.