

# Lösungshinweise zur Credit-Point-Klausur "Spieltheorie" (Variante a)

Sommersemester 2006

## Aufgabe 1:

Gewinnfunktion von Unternehmen  $i$ :

$$\begin{aligned} G_i(x_i, x_j) &= (a - x_i - x_j)x_i - cx_i - K^{fix}, & j \neq i \\ &= ax_i - x_i^2 - x_i x_j - cx_i - K^{fix} \end{aligned}$$

Maximierung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} &= a - c - 2x_i - x_j = 0 && \text{(BEO)} \\ \Rightarrow x_i^* &= \frac{a - c - x_j}{2} = R_i(x_j) \\ \Rightarrow x_j^* &= \frac{a - c - x_i}{2} = R_j(x_i) && \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

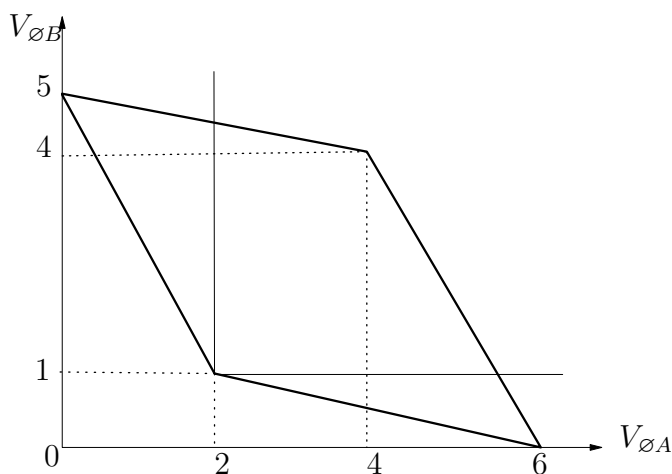
Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen:

$$\begin{aligned} a - c - 2x_1 &= \frac{a - c - x_1}{2} \\ 2a - 2c - 4x_1 &= a - c - x_1 \\ a - c &= 3x_1 \\ \Rightarrow x_1^* &= \frac{a - c}{3} = x_2^* && \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gewinnfunktion:

$$G_i = \left( a - c - \frac{2(a - c)}{3} \right) \frac{a - c}{3} - K^{fix} = \left( \frac{a - c}{3} \right)^2 - K^{fix} = \frac{(a - c)^2}{9} - K^{fix}$$

## Aufgabe 2:

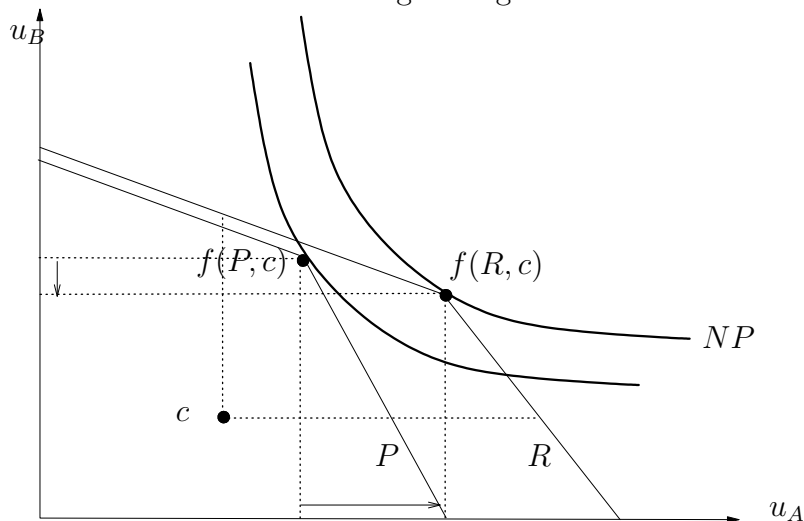


Die durchschnittliche Auszahlung ist definiert als  $V_\emptyset = (1 - \delta)V$  mit  $V$  als einer abdiskontierten Zahlungsreihe, die sich durch irgendeinen Spielverlauf ergibt. Die Fläche des Rombus in der Grafik stellt sämtliche durchschnittlichen Auszahlungen dar, die für das gegebene  $G(\infty, \delta)$  möglich sind.

Das Folktheorem besagt, dass in dem Fall, wo in einem Basisspiel die Auszahlungen der Nash-Lösung von einem anderen Auszahlungsvektor  $u$  pareto-dominiert werden, es für das u.o.w. Spiel und hinreichend hohem Diskontfaktor teilspielperfekte Strategien gibt, die eine durchschnittliche Auszahlung in Höhe von  $u$  generieren. Das ist bei dem gegebenen Spiel der Fall: Der Auszahlungsvektor  $(2, 1)$  der Nash-Lösung  $(D, D)$  wird pareto-dominiert vom Auszahlungsvektor  $(4, 4)$  (siehe Grafik).

### Aufgabe 3:

Grafik zur Nash-Verhandlungslösung:



Der Auszahlungsraum  $P$  ist die Menge aller möglichen Auszahlungsvektoren in einem Verhandlungsspiel. Ein Verhandlungsproblem besteht dann, wenn es mindestens einen Auszahlungsvektor gibt, der die Auszahlungen im Drohpunkt pareto-dominiert. Die Pareto-Grenze  $H(P)$  ist die Menge aller paretoeffizienten Auszahlungsvektoren und somit eine Teilmenge des Auszahlungsraums.

Bei der Nash-Verhandlungslösung wird das sog. Nash-Produkt maximiert unter der Nebenbedingung, dass die Lösung auf der Pareto-Grenze liegt:

$$\max_{u \in H(P)} NP = (u_1 - c_1)(u_2 - c_2) \dots (u_n - c_n)$$

mit  $c_i$  als der Auszahlung für Spieler  $i$  im Konfliktpunkt. Die Lösung ist der Tangentialpunkt des Nash-Produktes an der Auszahlungsgrenze (Grafik).

Die Nash-Verhandlungslösung erfüllt folgende Eigenschaften: Unabhängigkeit von äquivalenten Nutzentransformationen, Symmetrie, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und Pareto-Optimalität. Das Monotonieaxiom erfüllt die Lösung nicht, d.h. wenn sich c.p. der Auszahlungsraum von  $P$  nach  $R$  vergrößert, dann kann die Nash-Lösung dazu führen, dass ein Spieler schlechter gestellt wird. Grafik: Auszahlungsraum  $P \subset R$ , bei der Lösung  $f(R, c)$  wird Spieler B schlechter gestellt als in  $f(P, c)$ .