**Ergänzung des Skriptes bei der Bestimmung von Multiplikatoren:**

Bei einer Funktion $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ist zu beachten, dass die übliche Formulierung des totalen Differentials (vgl. Skript)

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

korrekt lauten muss:

$$dy \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

denn es handelt sich lediglich um eine lineare Approximation (Taylorapproximation 1. Ordnung). Sind alle Ableitungen zweiter Ordnung Null, so ist die Taylorapproximation exakt (und insofern keine Approximation). Bei den betrachteten Multiplikatoren ist dies fast immer der Fall, aber es gibt zwei Ausnahmen: Bei einer Variation der marginalen Konsumneigung $c$ und des Steuersatzes $t_Y$ kommt es zu einem Approximationsfehler!

Der Zusammenhang wird am Beispiel der Steuereinnahmen $T = t_Y \cdot Y$ verdeulicht. Im Skript steht vereinfachend die Approximation $dT = Y dt_Y + t_Y dY$ als totales Differential; korrekt muss dort ein "$\simeq$" stehen. Man kann sich dies durch eine Analyse der *absoluten* Änderungen verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\Delta T = T^{neu} - T^{alt} &= t^{neu}Y^{neu} - t^{alt}Y^{alt} \\
&= (t^{alt} + \Delta t)(Y^{alt} + \Delta Y) - t^{alt}Y^{alt} \\
&= t^{alt}\Delta Y + \Delta t Y^{alt} + \underbrace{\Delta t \Delta Y}_{!} \\
&\simeq t^{alt}\Delta Y + \Delta t Y^{alt}
\end{aligned}$$

Formal anspruchsvoller kann man dies zeigen, wenn man für $T = t_Y \cdot Y$ die vollständige Taylorentwicklung hinschreibt, die allerdings bereits nach dem zweiten Glied aufhört:

$$\begin{aligned}
dT &= \underbrace{\frac{\partial T}{\partial Y}}_{t_Y} dY + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t_Y}}_{Y} dt_Y + \frac{1}{2}\left( \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}}_{0}(dY)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial t_Y^2}}_{0}(dt_Y)^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial t_Y \partial Y}}_{1} dt_Y dY \right) \\
&= t_Y dY + Y dt_Y + \underbrace{dtY dY}_{!},
\end{aligned}$$

wobei der letzte Term im Skript wie auch in vielen Lehrbuchdarstellungen unterdrückt wird. Dementsprechend sind auch die hergeleiteten Multiplikatoren bei einer Änderung von $c$ oder $t_Y$ nur Approximationen. Im einkommenstheoretischen Modell mit Pauschalsteuer wird der Einkommensmultiplikator bei einer Änderung der marginalen Konsumneigung exakt wie folgt hergeleitet (unter Beachtung von $dC^a = dT^a = dC^a_{St} = d\bar{I} = 0$):

$$\begin{aligned}
Y &= C^a + c(Y - T^a) + C^a_{St} + \bar{I} \\
dY &= cdY + Ydc + \underbrace{dYdc}_{!} - T^a dc \\
(1 - c - dc)dY &= (Y - T^a)dc \\
\frac{dY}{dc} &= \frac{Y - T^a}{1 - c - dc}
\end{aligned}$$

und wegen $Y = Y^* = (C^a + C^a_{St} + \bar{I} - cT^a)/(1 - c)$

$$= \frac{C^a + C^a_{St} + \bar{I} - T^a}{(1 - c)(1 - c - dc)} > \frac{C^a + C^a_{St} + \bar{I} - T^a}{(1 - c)(1 - c)}$$

Der Multiplikator ist also geringfügig größ er als der approximativ berechnete.

Analoges gilt für den Steuersatzmultiplikator sowie die entsprechenden Multiplikatoren im IS-LM-Modell.

Es steht jedem frei, die exakte oder die approximative Form zu wählen. Bei Zahlenbeispielen mit absoluten Änderungen kommt es bei Verwendung der approximativen Form jedoch zu geringfügigen numerischen Abweichungen, die größ er als Rundungsfehler sein können.