

## Inhomogene lineare Differenzgleichungen 2. Ordnung

1. In den betrachteten Konjunkturmodellen ergibt sich durch Einsetzen der Verhaltensgleichungen in die Gleichgewichtsbedingung und Auflösen nach den Zustandsvariablen  $Y_t$  die *dynamische Grundgleichung* in der allgemeinen Form

$$Y_t = a + bY_{t-1} + cY_{t-2} \quad (1)$$

wobei  $a, b$  und  $c$  modellspezifische Parameterterme sind.

2. Die sogenannte *partikuläre Lösung* ergibt sich durch Gleichsetzen von  $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ , also

$$\begin{aligned} Y^* &= a + bY^* + cY^* \\ \Rightarrow (1 - b - c)Y^* &= a \\ \Rightarrow Y^* &= \frac{a}{1 - b - c} \end{aligned} \quad (2)$$

$Y^*$  ist der Gleichgewichtswert.

3. Zur Lösung des sogenannten *homogenen Teils* betrachtet man  $Y_t$  als Summe aus Gleichgewichtswert und einer Abweichung:  $Y_t = Y^* + u_t$ . Einsetzen in die dynamische Grundgleichung (1) ergibt

$$\begin{aligned} Y^* + u_t &= a + b(Y^* + u_{t-1}) + c(Y^* + u_{t-2}) \\ \Rightarrow Y^* + u_t &= a + bY^* + bu_{t-1} + cY^* + cu_{t-2} \end{aligned}$$

und durch Subtraktion der partikulären Lösung  $Y^* = a + bY^* + cY^*$  ergibt sich der homogene Teil

$$u_t = bu_{t-1} + cu_{t-2} \quad (3)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung der Störungen  $u_t$ . Der allgemeine Lösungsansatz lautet

$$u_t = u_A \lambda^t$$

mit  $u_A$  als ein Term, der von der Anfangsstörung bestimmt wird, und  $\lambda$  als "Eigenwert" der Systemgleichung. Einsetzen in (3) ergibt

$$u_A \lambda^t = bu_A \lambda^{t-1} + cu_A \lambda^{t-2}$$

Teilen beider Seiten durch  $u_A \lambda^{t-2}$  ergibt

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= b\lambda + c \\ \Rightarrow \lambda^2 - b\lambda - c &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \end{aligned} \quad (4)$$

Je nachdem, ob  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  identisch oder verschieden sind, lautet die Lösung des homogenen Teils (3)

$$\begin{aligned} u_t &= m_1 \lambda_1^t + m_2 \lambda_2^t && \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ u_t &= (m_1 + t m_2) \lambda^t && \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{aligned}$$

Die Größen  $m_1, m_2$  hängen dabei von den Anfangsstörungen  $u_0$  und  $u_1$  ab (bei einer Differenzgleichung 2. Ordnung müssen zwei Startwerte vorgegeben werden).

4. Die *allgemeine Lösung* des dynamischen Systems (1) ergibt sich durch Addition von partikulärem und homogenem Teil der Lösung:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y^* + u_t && (5) \\ \text{also im Fall } \lambda_1 \neq \lambda_2: & Y_t = Y^* + m_1 \lambda_1^t + m_2 \lambda_2^t \\ \text{und im Fall } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda: & Y_t = Y^* + (m_1 + t m_2) \lambda^t \end{aligned}$$

5. Die Frage, ob das System Schwingungen produziert oder nicht, hängt davon ab, ob die Wurzeln  $\lambda_{1,2}$  reell oder komplex sind (vgl. Gl. (4)).

Fall 1: Reelle Wurzel:  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \geq 0$

Im Fall reeller Wurzel gibt es keine Schwingungen des Systems. Wegen des Lösungsansatzes  $u_t = u_A \lambda^t$  kann man unmittelbar sehen, dass die Anfangsstörung immer kleiner wird, wenn  $\lambda$  betragsmäßig kleiner als 1 ist, und dass sie immer größer wird, wenn  $\lambda$  betragsmäßig größer als 1 ist. Bei größer werdenden Störungen bewegt sich das System immer weiter weg vom Gleichgewichtswert  $Y^*$ , im Fall abnehmender Störungen konvergiert  $Y_t$  gegen  $Y^*$ .

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| > 1 & \quad (\text{monotone}) \text{ Divergenz} \\ |\lambda_{1,2}| < 1 & \quad (\text{monotone}) \text{ Konvergenz} \end{aligned}$$

Für den Fall  $|\lambda_{1,2}| = 1$  ist das qualitative Verhalten nicht eindeutig bestimmbar. Sind die Vorzeichen von  $\lambda_{1,2}$  positiv, dann verläuft die Divergenz bzw. Konvergenz monoton, im Fall eines negativen Vorzeichens in alternierenden Zeitreihen. Letzteres ergibt sich daraus, dass wegen  $u_t = u_A \lambda^t$  je nachdem, ob  $t$  eine gerade oder ungerade Zahl ist, das Vorzeichen von  $\lambda^t$  wechselt. In Absolutbeträgen betrachtet ist die Konvergenz aber auch dann monoton. Bei *verschiedenen* Vorzeichen der beiden Wurzeln  $\lambda_{1,2}$  entscheidet die betragsmäßig größere Wurzel über das Konvergenzverhalten. Bei  $\lambda_1 = 1.2, \lambda_2 = -0.5$  wird es z.B. eine abnehmende alternierende Schwankung um einen explodierenden Pfad geben.

Fall 2: Komplexe Wurzeln:  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c < 0$

Im Fall komplexer Wurzeln entstehen Schwingungen. Eine komplexe Wurzel  $\lambda_{1,2} = m \pm ni$  mit  $i = \sqrt{-1}$  kann man als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene darstellen (vgl. Abbildung 4). Dabei ist  $m$  der *Realteil* und  $n$  der *Imaginärteil* der Zahl. Da die Wurzeln konjugiert komplex sind, sind die Vektoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gleich lang. Ähnlich wie im Fall

reeller Wurzeln hängt die Konvergenz oder Divergenz davon ab, ob sich der Vektor innerhalb oder außerhalb des Einheitskreises befindet, also die Länge des Vektors kleiner oder größer 1 ist. Die Länge des Vektors ist bestimmt durch

$$\operatorname{mod} \lambda_1 = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{m^2 - n^2} = \operatorname{mod} \lambda_2 \quad (\text{jeweils positive Wurzel})$$

Im Gaußschen Zahlenraum ist  $\operatorname{mod} \lambda_{1,2}$ , also die Länge des Vektors durch die Vektornorm zu ermitteln (im 2-dimensionalen Raum entspricht dies der Anwendung des Satzes von Pythagoras, siehe Abbildung 4). Da konjugiert komplexe Wurzeln im Gaußschen Zahlenraum gleich lange Vektoren bilden, ist es praktisch, die Wurzel mit dem negativen Imaginärteil zu verwenden, so dass gilt:

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{b}{2}\right), & n &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \\ m^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2, & n^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \\ \text{und somit} \quad \operatorname{mod} \lambda_2 &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \\ &= \sqrt{-c} \end{aligned}$$

Analog zum reellen Fall gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} \lambda_{1,2} > 1 & \quad \text{divergierende Schwingungen} \\ \operatorname{mod} \lambda_{1,2} < 1 & \quad \text{konvergierende Schwingungen} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Schwingungen eine zunehmende oder abnehmende Amplitude haben. Für den Fall  $|\lambda_{1,2}| = 1$  ist das qualitative Verhalten wiederum nicht eindeutig bestimmbar. Reelle Wurzeln kann man als "Spezialfall" ansehen, bei denen der Imaginärteil Null ist. Es ist dann der Realteil  $m = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$  und somit  $\operatorname{mod} \lambda_{1,2} = \sqrt{m^2 + 0} = |\lambda_{1,2}|$ . Da es keinen Imaginärteil gibt, muss also  $\lambda_{1,2}$  im Einheitsintervall  $(-1, 1)$  liegen, damit  $Y_t$  zu  $Y^*$  konvergiert.

Durch die beiden Schritte

- Bestimmung der Bedingungen, unter denen die Wurzeln komplex oder reell sind,
- Bestimmung der Bedingungen, unter denen Divergenz, Konvergenz oder Stationarität gegeben ist,

kann das qualitative dynamische Systemverhalten bestimmt werden.

Das allgemeine dynamische Modell (1) kann in der Konjunkturtheorie verschiedene Formen annehmen:

	Hicks-Modell	Samuelson-Modell	Metzler-Modell
$a$	$C^a + I^a$	$C^a + I^a$	$I^a$
$b$	$(c + \beta), 0 \leq c \leq 1, \beta > 0$	$c(1 + \beta), 0 \leq c \leq 1, \beta > 0$	$c(k + 2), 0 \leq c \leq 1, k > 0$
$c$	$-\beta$	$-c\beta$	$-c(k + 1)$
$Y^*$	$\frac{C^a + I^a}{1 - c}$	$\frac{C^a + I^a}{1 - c}$	$\frac{I^a}{1 - c(k + 2) + c(k + 1)}$
$\lambda_{1,2}$	$\frac{(c + \beta)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(c + \beta)}{2}\right)^2 - \beta}$	$\frac{c(1 + \beta)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c(1 + \beta)}{2}\right)^2 - c\beta}$	$\frac{c(k + 2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c(k + 2)}{2}\right)^2 - c(k + 1)}$
reell	$c \geq 2\sqrt{\beta} - \beta$	$c \geq \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2}$	$c \geq \frac{4(k + 1)}{(k + 2)^2}$
komplex	$c < 2\sqrt{\beta} - \beta$	$c < \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2}$	$c < \frac{4(k + 1)}{(k + 2)^2}$
Konvergenz	$\beta < 1$	$c < \frac{1}{\beta}$	$c < \frac{1}{k + 1}$ (unvereinbar mit reellen EW!)
Divergenz	$\beta > 1$	$c > \frac{1}{\beta}$	$c > \frac{1}{k + 1}$

Bemerkung:

Aufgrund der Parameterrestriktionen  $0 \leq c \leq 1, k > 0, \beta > 0$  kann überprüft werden, dass es keine zulässige Parameterkonstellation gibt, die zu negativen reellen Wurzeln, also alternierenden Zeitreihen führt. Beim Metzler-Modell kann zusätzlich festgestellt werden, dass es keine Parameterkonstellation geben kann, die zu reellen Wurzeln *und* zur Konvergenz führt. Eine monotone Konvergenz zur stationären Lösung ist somit in diesem Modell nicht möglich.

Grafische Darstellung:

Da das Verhalten dieser Modelle jeweils durch zwei Verhaltensparameter bestimmt wird, können die Bedingungen für reelle bzw. komplexe Wurzeln sowie für Konvergenz bzw. Divergenz als *Funktionen* graphisch dargestellt werden (vgl. dazu G.Gabisch/H.-W.Lorenz, *Business Cycle Theory*. 2nd. ed., Berlin usw. 1989, S.52, S.49, S.56). Für die folgenden Abbildungen gilt:

- 
- I monotone Konvergenz
  - II monotone Divergenz
  - III konvergierende (gedämpfte) Schwingungen
  - IV divergierende (explodierende) Schwingungen
-

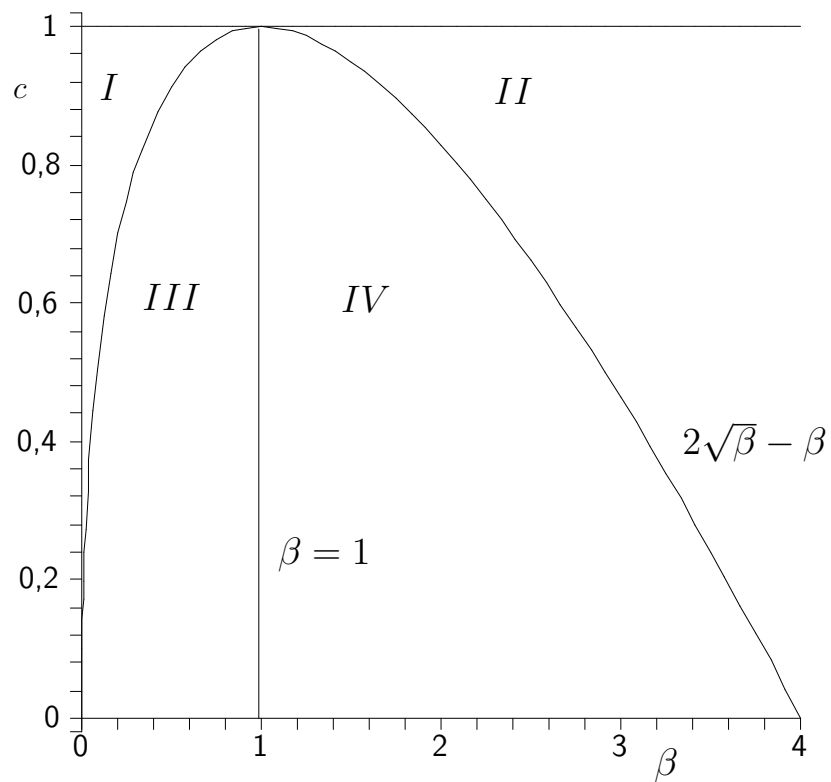


Abbildung 1: Hicks-Modell

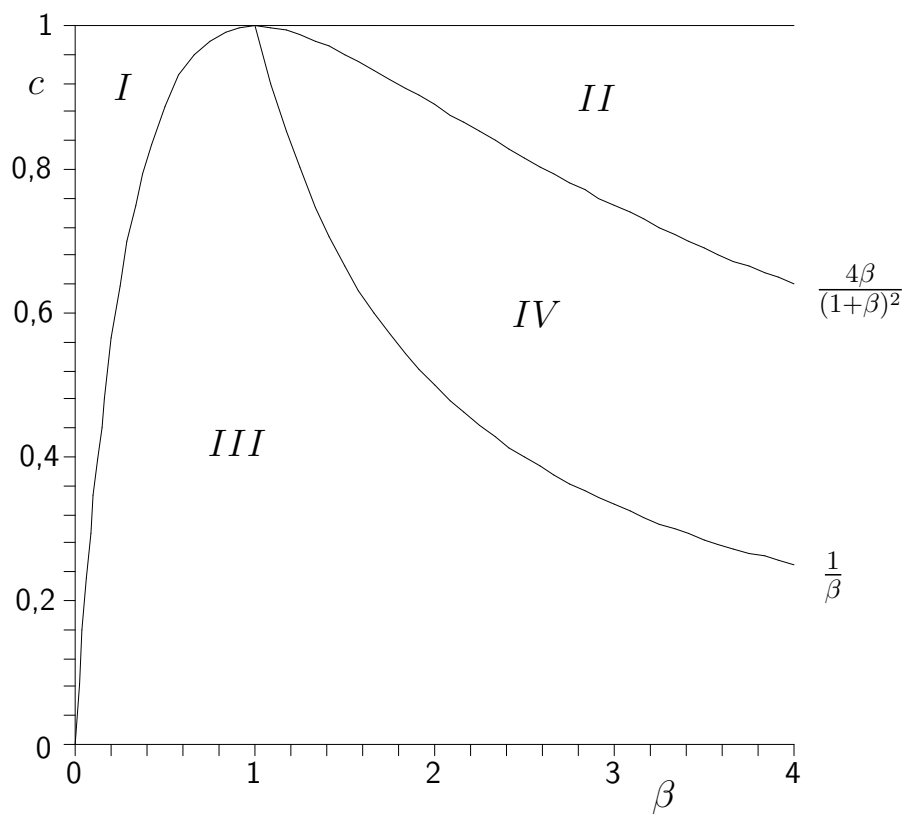


Abbildung 2: Samuelson-Modell

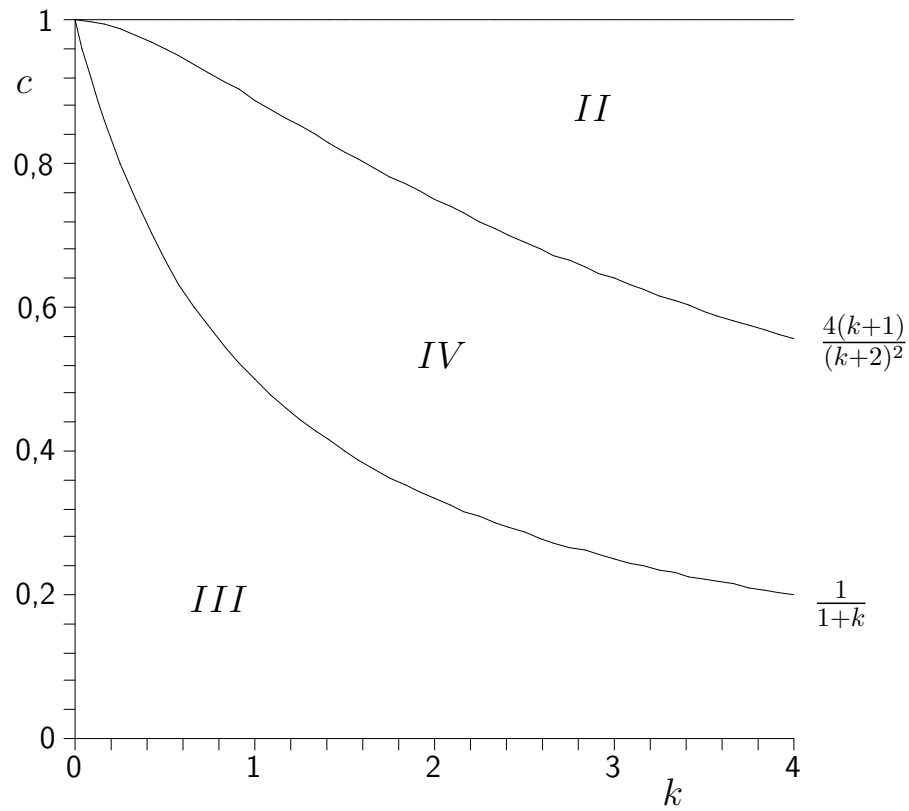


Abbildung 3: Metzler-Modell

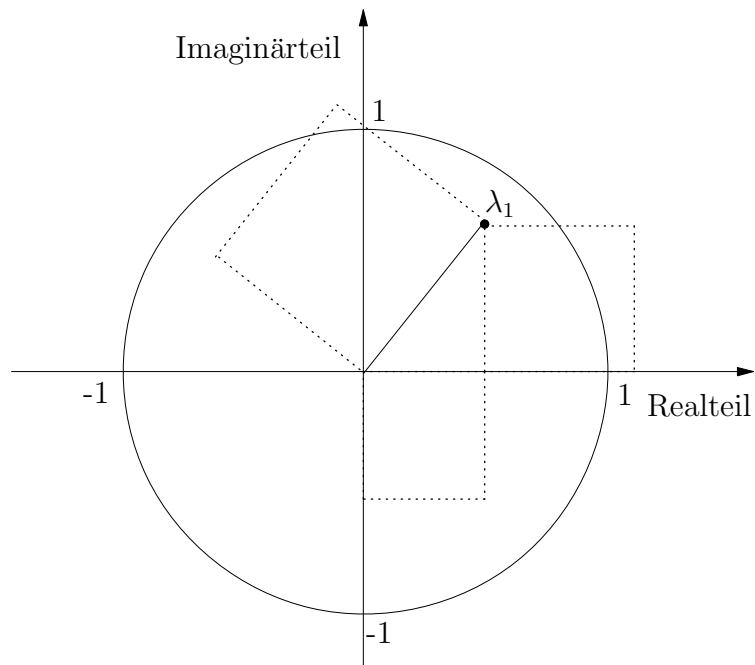


Abbildung 4: Komplexe Eigenwerte im Gaussschen Zahlenraum